வணிகக் கணிதம்

மேல்நிலை - இரண்டாம் ஆண்டு

தொகுதி-1

தீண்டாமை ஒரு பாவச்செயல்

தீண்டாமை ஒரு பெருங்குற்றம்

தீண்டாமை மனிதத்தன்மையற்ற செயல்

தமிழ் நாட்டுப் பாடநூல் கழகம்

கல்லூரிச் சாலை, சென்னை - 600 006.

முதற்பதிப்பு - 2005
இரண்டாம் பதிப்பு 2006

பாடல்நூல் குழு

தலைவர்

முனைவர். **ச. அந்தோணிராஜ்**
இணைப்பேராசிரியர், கணிதத்துறை
மாநிலக் கல்லூரி,
சென்னை – 5.

மேலாய்வாளர்

முனைவர். **மா.ரெ. சீனிவாசன்**
இணைப்பேராசிரியர், புள்ளியியல் துறை,
சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்
சென்னை – 5.

மேலாய்வாளர்கள்-நூலாசிரியர்கள்

திரு. **ந. ரமேஷ்**
தேர்வுநிலை விரிவுரையாளர்
கணிதத்துறை
அரசு ஆடவர் கலைக் கல்லூரி
நந்தனம், சென்னை – 35.

திரு. **இரா. மூர்த்தி**
தேர்வுநிலை விரிவுரையாளர்
கணிதத்துறை
மாநிலக் கல்லூரி
சென்னை – 5.

நூலாசிரியர்கள்

திரு. **வேணு. பிரகாஷ்**
புள்ளியியல் விரிவுரையாளர் (மு.நி.)
மாநிலக் கல்லூரி
சென்னை – 5.

திரு. **சு. இராமச்சந்திரன்**
முதுகலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்
சிந்தாதிரிப்பேட்டை மேல்நிலைப்பள்ளி
சிந்தாதிரிப்பேட்டை, சென்னை–2.

திரு. **சங். திவே. பத்மநாபன்**
முதுகலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்
இந்து மேல்நிலைப்பள்ளி
திருவல்லிக்கேணி, சென்னை–5.

திரு. **சா. இராமன்**
முதுகலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்
ஜெயகோபால் கரோடியா தேசிய மேல்நிலைப்
பள்ளி, கிழக்கு தாம்பரம், சென்னை–59.

திருமதி. **அமலி ராஜா**
முதுகலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்
நல்ல ஆயன் மெட்ரிக். மேல்நிலைப்பள்ளி
கல்லூரிச்சாலை, சென்னை–6.

திருமதி. **மு. மாலினி**
முதுகலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்
பெ.சு. மேல்நிலைப் பள்ளி (மையம்)
மைலாப்பூர், சென்னை–4.

விலை : ரூ.

பாடங்கள் தயாரிப்பு :
தமிழ்நாடு அரசுக்காக பள்ளிக் கல்வி இயக்ககம், தமிழ்நாடு

இந்நூல் 60 ஜி.எஸ்.எம். தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது.

முகவுரை

"எந்த ஓர் உண்மையின் மிகத் தெளிவான மற்றும் அழகான கூற்று இறுதியில் கணித வடிவத்தையே அடைய வேண்டும்" – தொரவ்.

பொருளியலுக்கான நோபல் பரிசு பெற்றவர்களில் அறுபது விழுக்காட்டிற்கும் மேற்பட்டோர் கணிதத்துவ பொருளியலில் மூலமுதலான சாதனைகள் செ–தவர்கள். அத்தகைய பொருளியல் வல்லுநர்கள் உயர் கணிதத்தை ஆழ்ந்து பயின்றதோடு அதனைப் பெருப்பொருளியல் மற்றும் கணிதப் பொருளியல் ஆகியவற்றின் உயர் ஆ–வுகளுக்கு வெற்றிகரமாகப் பயன்படுத்தினர்.

ஸ்டான்ஃபோர்டு பல்கலைக் கழக நிதித்துறைப் பேராசிரியர் முனைவர் ஸ்கோல்ஸ் என்பவரும் பொருளியல் வல்லுனர் முனைவர் மெர்டன் என்பவரும் இணைந்து 1970ஆம் ஆண்டு, காலப்போக்கில் ஏற்படும் மாற்றத்தைக் குறிக்கும் வகைக்கெழு சமன்பாட்டுச் சூத்திரம் ஒன்றைக் கண்டுபிடித்து பொருளாதாரத்திற்கென 1997ஆம் ஆண்டு நோபல் பரிசு பெற்றனர். இச்சூத்திரம் தெரிவுநிலைக் காலம், விலைகள், வட்டி வீதம் மற்றும் சந்தையில் மாறும் தன்மை என்ற நான்கு மாறிகளின் அடிப்படையில் விலையைத் தீர்மானிக்கும் வகையில் அமைந்திருந்தது. இச்சூத்திரம் நடைமுறையில் பெரிதும் பயன்பட்டதோடல்லாமல், அமெரிக்க பங்குச் சந்தையையே மாற்றமடையச் செ–தது.

பொருளியல் என்பது சில வெளிப்படை உண்மைகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு தருக்க முறையைப் பயன்படுத்தி வருவிக்கப்படுவனவற்றை சார்ந்த அறிவியல் என்று கருதப்பட்டது. ஆனால் இன்று பொருளியல் முற்றிலும் உருமாறிவிட்டது. வரைபடங்கள், சமன்பாடுகள் மற்றும் புள்ளியியல் ஆகியவற்றின் ஏராளமான பயன்பாடுகள், பொருளியல் தன்மையை மாற்றிவிட்டன. சில மாறிகளில் துவங்கி படிப்படியாக மற்ற மாறிகளைப் புகுத்தி பின்னர் அவற்றிற்கிடையேயான தொடர்பையும், மற்றும் பொருளாதாரக் கட்டமைப்பின் உள் அமைப்புத் தத்துவத்தை ஆராயவும் கணிதம் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இவ்விதமாக புதிய பொருளியல் உண்மைகளைக் கண்டு அவற்றைப் பெருமளவில் பயன்படுத்த கணிதவழி அமைப்புகள் பயன்படுகின்றன.

ஆயுள் காப்பீடு, பங்கு வர்த்தகம் மற்றும் முதலீடு போன்றவைகளை உள்ளடக்கிய இடர்–நேர்வு மேலாண்மை கணிதவியலைச் சார்ந்துள்ளது. எதிர்காலத்தை மிகத் துல்லியமாக கணிக்க, கணிதத்தைச் சாதகமாகப் பயன்படுத்த முடியும்; ஆனாலும் துல்லியத் தன்மை நூறு விழுக்காடாக இருக்காது என்பது உண்மைதான். எனினும் ஒருவர் தன் பணத்தை எவ்வாறு முதலீடு செ–வது என்று புத்திசாலித்தனமாகவும் துல்லியமாகவும் முடிவெடுக்க கணிதம் பயன்படும். பதினேழாம் நூற்றாண்டைச் சேர்ந்த பாஸ்கல் மற்றும் ஃபெர்மாட் என்ற இரு கணித

வல்லுனர்கள் கணிதத்தைப் பயன்படுத்தி எதிர்கால நிகழ்வுகளைக் கணிக்கும் முறையை உருவாக்கினர். இரு பகடைகளை குறிப்பிட்ட தடவைகள் வீசும் விளையாட்டின் பல்வேறு நிகழ்வுகளின் நிகழ்தகவுகளை அவர்கள் கணக்கிட்டனர்.

நவீன பொருளாதாரப் பிரச்சனைகளின் சிக்கல்களின் கடுமை அதிகரித்துக் கொண்டே போவதால் புதிய முறைகளை ஏற்பதற்கும் ஆரா–வதற்குமான தேவை மேன்மேலும் கூடிக்கொண்டே போகிறது. கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல் அடிப்படையில் அமைந்த வழிமுறைகளைத் தக்கபடி பயன்படுத்தினால் அவை குறிப்பாக பொருளியல், வாணிபம் மற்றும் தொழில் ஆகிய துறைகளில் சுருக்கமான, ஒப்புமைத் தன்மையுடைய மற்றும் திறன்மிக்க கருவிகளாக அமையும். மேலும் இம்முறைகள் ஆ–வு செ–யப்படும் கோட்பாட்டை ஆழமாக அலசி ஆராய உதவுவதோடல்லாமல் சரியான மற்றும் பகுத்தறியும் அடிப்படையில் தீர்வுகளைப் பெறவும் வழிவகுக்கின்றன.

2005–2006 கல்வி ஆண்டு முதல் அறிமுகப்படுத்தப்படும் இப்பாடப் புத்தகம் பன்னிரெண்டாம் வகுப்பு வணிகக் கணிதத்தின் பாடத்திட்டத்திற் கிணங்க எழுதப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு பாடமும் அடிப்படைக் கருத்தில் துவங்கி படிப்படியாக கருத்துச் செறிவு பெறும் வண்ணம் அமைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு நிலையிலும் ஏராளமான எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. கருத்துருக்களையும் கலைச் சொற்களின் பொருளையும் மாணவர்கள் நன்கு கற்றுணர்ந்து மேலும் பல கணக்குகளைத் தாமாகவே எதிர்கொள்ள அவ்வெடுத்துக்காட்டுகள் உதவும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள பயிற்சி கணக்குகள் மாணவர்களுக்குப் போதுமான பயிற்சியை அளிக்கும். கணக்குகளைத் தாங்களே தீர்க்கத் தேவையான தன்னம்பிக்கையை வளர்ப்பதாக அவை அமையும். மாணவர்கள் இப்புத்தகத்தைப் பயன்படுத்தும்பொழுது, உடனுக்குடன் அந்தந்த கணக்குகளை ஓரோர்படியாகப் போட்டுப் பார்க்க வேண்டும் என விரும்புகிறோம். இப்புத்தகத்தின் புள்ளியியல் பகுதிகளில் எண்கள் சார்ந்த கணக்கீடுகள் இருப்பதால் வணிகக் கணித மாணவர்கள் அக்கணக்குகளின் தீர்வுகளுக்கு கணிப்பான்களை (**calculators**) பயன்படுத்துமாறு அறிவுறுத்தப்படுகிறார்கள். தங்களின் சொந்த முயற்சியால் பல கணக்குகளைத் தீர்ப்பதில் வெற்றிபெறும் மாணவர்கள், புதிய கணக்குகளின் அடிப்படையை உணர்ந்து அவற்றைத் தீர்க்கும் அவர்தம் திறன் பெருமளவில் பெருகுவதை உறுதியாக அறிய முடியும். பொதுத் தேர்வுகளில் விடைகளை எளிதில் அளிக்க அவர்களால் இயலும்.

இம்முயற்சிக்கு ஆசி வழங்கி வழி நடத்திய எல்லாம் வல்ல இறைவனைப் போற்றுகின்றோம். இப்புத்தகம் கல்விச் சமூகத்தினரிடையே வணிகக் கணிதப் பாடத்திற்கான ஆர்வத்தைக் கிளர்ந்தெழச் செ–யும் என நம்புகிறோம்.

"அண்மைக்காலத்தில் பொருளியல் தத்துவங்களைக் கண்டுபிடிப்பதில் கணிதவியல் யுக்திகளை நேரடியாகப் பயன்படுத்தும் முறைகள் கணித வல்லுநர்களின் கரங்களில் மிகச்சிறந்த சேவை ஆற்றியுள்ளன." – ஆல்ஃப்ரட் மார்ஷல்

மாலினி பிரகா	**அமலி ராஜா மூர்த்தி**	**இராமன் ரமே**	**பத்மநாபன் சீனிவாசன்**	**இராமச்சந்திரன் அந்தோணிராஜ்**

பொருளடக்கம்

(தொகுதி–2 இல் தொடர்கிறது...)

அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள் 1

அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள் பொருளாதாரம், வாணிபம், தொழில் போன்ற பல துறைகளில் மிகுந்து உள்ளன. நாம் இந்தப் பாடத்தில் அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகள் பற்றிய சில புதிய நுட்பங்களைப் பயின்று அவற்றின் பயன்பாடுகளை அறியலாம்.

1.1 ஓர் அணியின் நேர்மாறு (Inverse of a matrix)

1.1.1 ஓர் அணிக்கோவையின் உறுப்புகளின் சிற்றணிகள் மற்றும் இணைக் காரணிகள்

A என்ற அணிக்கோவையின் a_{ij} என்ற ஓர் உறுப்பின் சிற்றணி (minor) என்பது A இல் இருந்து a_{ij} உள்ள நிரை, நிரல்களை விடுத்துப் பெறப்படும் அணிக்கோவை ஆகும். அதை M_{ij} எனக் குறிப்போம். M_{ij} என்பது a_{ij} இன் சிற்றணி எனில் a_{ij}-இன் இணைக் காரணி (cofactor) C_{ij} என்பது கீழ்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$C_{ij} = \begin{cases} M_{ij}, & i+j \text{ இரட்டைப்படை எண் எனில்} \\ -M_{ij}, & i+j \text{ ஒற்றைப்படை எண் எனில்} \end{cases}$$

அதாவது இணைக்காரணிகள், குறியிடப்பட்ட சிற்றணிகள் ஆகும்.

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ என்ற அணிக்கோவையில்

$$M_{11} = a_{22}, \quad M_{12} = a_{21}, \quad M_{21} = a_{12}, \; M_{22} = a_{11}$$

மேலும் $C_{11} = a_{22}, \quad C_{12} = -a_{21}, \; C_{21} = -a_{12}, \quad C_{22} = a_{11}$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ என்ற அணிக்கோவையில்

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad C_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad C_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \qquad C_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad C_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ இன்னபிற உள்ளன.

1.1.2 ஒரு சதுர அணியின் சேர்ப்பு அணி (Adjoint of a square matrix)

A என்ற சதுர அணியின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் அணிக்கோவை | A | இல் அந்த உறுப்பின் இணைக் காரணியால் பதிலீடு செ–து பெறப்படும் அணியின் நிரை நிரல் மாற்று அணி, A யின் **சேர்ப்பு அணி** ஆகும். அதனை Adj A என்று குறிப்போம்.

அதாவது, $\text{Adj}A = A^t_c$

குறிப்பு :

(i) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ எனில், $A_c = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

$\therefore \text{Adj } A = A^t_c = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

எனவே $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ என்ற 2 x 2 சதுர அணியின்

சேர்ப்பு அணியை $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ என உடனடியாக எழுதலாம்.

(ii) Adj I = I, இதில் I என்பது ஓரலகு அணி.

(iii) A(AdjA) = (Adj A) A = | A | I

(iv) Adj (AB) = (Adj B) (Adj A)

(v) A என்பது வரிசை 2 உடைய சதுர அணியெனில், |AdjA| = |A|

A என்பது வரிசை 3 உடைய சதுர அணியெனில், $|\text{Adj}A| = |A|^2$

எடுத்துக்காட்டு 1

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் சேர்ப்பு அணியை எழுதவும்.

தீர்வு :

$$\text{Adj A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 2

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **என்ற அணியின் சேர்ப்பு அணியைக் காண்க.**

தீர்வு :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Adj A} = A_c^t$$

இதில்,

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \; C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8, \quad C_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \; C_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \; C_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2, \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$\therefore A_c = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 1 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

எனவே,

$$\text{Adj A} = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 1 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

1.1.3 பூச்சியக் கோவை அணியாக இல்லாத அணியின் நேர்மாறு (Inverse of a non-singular matrix).

A என்ற பூச்சியக்கோவை அணியாக இல்லாத அணியின் **நேர்மாறு அணி** என்பது AB = BA = I என அமையும் B என்ற அணி ஆகும். B ஐ A^{-1} எனக் குறிப்போம்.

குறிப்பு :

(i) சதுர அணி அல்லாத அணிக்கு நேர்மாறு கிடையாது.

(ii) $|A| \neq 0$ என இருந்தால் மட்டுமே A என்ற அணிக்கு நேர்மாறு இருக்கும். அதாவது A ஒரு பூச்சியக் கோவை அணி எனில் A^{-1} கிடையாது.

(iii) B என்பது A இன் நேர்மாறு எனில் A என்பது B இன் நேர்மாறு ஆகும். அதாவது $B = A^{-1}$ எனில் $A = B^{-1}$ ஆகும்.

(iv) $A\,A^{-1} = I = A^{-1}\,A$

(v) ஓர் அணிக்கு நேர்மாறு இருக்குமானால் அது ஒருமைத் தன்மை வா–ந்ததாகும். அதாவது எந்த அணிக்கும் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட நேர்மாறுகள் இருக்காது.

(vi) A^{-1} இன் வரிசையும் A இன் வரிசையும் சமமாக இருக்கும்.

(vii) $I^{-1} = I$

(viii) $(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$, (நேர்மாறுகள் இருக்குமானால்)

(ix) $A^2 = I$ எனில் $A^{-1} = A$ ஆகும்.

(x) $AB = C$ எனில்
(a) $A = CB^{-1}$ (b) $B = A^{-1}C$, (நேர்மாறுகள் இருக்குமானால்)

(xi) $A(\text{Adj}A) = (\text{Adj}A)A = |A|\,I$ என்பது நாம் அறிந்ததே.

$$\therefore A\frac{1}{|A|}(\text{Adj}A) = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}A)A = I \qquad (\because |A| \neq 0)$$

எனவே, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}A)$. அதாவது, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^{t}_{c}$

(xii) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $|A| = ad - bc \neq 0$ என்க.

எனவே, $A_c = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$, $A^{t}_{c} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\therefore$ 2 x 2 வரிசையுடைய $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ என்ற சதுர அணியின் நேர்மாறு $ad - bc \neq 0$ எனில், $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ என்று உடனடியாக எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3

$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, என்ற அணிக்கு நேர்மாறு அணி இருக்குமானால் அதனைக்காண்க.

தீர்வு :

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \therefore\ A^{-1} \text{ உள்ளது..}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 4

(i) $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$ (ii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ என்ற அணிகளுக்கு நேர்மாறு அணிகள் கிடையாது எனக்காட்டுக.

தீர்வு :

(i) $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \therefore\ A^{-1}$ கிடையாது.

(ii) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \therefore\ A^{-1}$ கிடையாது. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

எடுத்துக்காட்டு 5

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ என்ற அணிக்கு நேர்மாறு இருக்குமானால், அதனைக் காண்க.

தீர்வு :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \quad \therefore\ A^{-1} \text{ உள்ளது.}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A_c^t$$

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5,\ C_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 7,\ C_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 10,\ C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -8,\ C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5,\ C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10,\ C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

எனவே,

$$A_c = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 10 & -8 & 1 \\ -5 & 10 & -5 \end{pmatrix},\ A^t{}_c = \begin{pmatrix} -5 & 10 & -5 \\ 7 & -8 & 10 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \therefore A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -5 & 10 & -5 \\ 7 & -8 & 10 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 6

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{17} & \frac{5}{17} & \frac{1}{17} \\ \frac{8}{17} & \frac{6}{17} & -\frac{9}{17} \\ \frac{10}{17} & -\frac{1}{17} & -\frac{7}{17} \end{pmatrix}$$ **என்ற அணிகள் ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறு ஆகும் என்று காட்டுக.**

தீர்வு:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{17} & \frac{5}{17} & \frac{1}{17} \\ \frac{8}{17} & \frac{6}{17} & -\frac{9}{17} \\ \frac{10}{17} & -\frac{1}{17} & -\frac{7}{17} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 8 & 6 & -9 \\ 10 & -1 & -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

A மற்றும் B சதுர அணிகளாகவும் $AB = I$ என்றும் இருப்பதால் அவை ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறு ஆகும்.

பயிற்சி 1.1

1) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் சேர்ப்பு அணியை எழுதுக.

2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் சேர்ப்பு அணியைக் காண்க.

3) $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் சேர்ப்பு அணி அதே அணிதான் என்று காட்டுக.

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ என்ற அணிக்கு, $A(\text{Adj } A) = (\text{Adj } A)\, A = |A|\, I$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

5) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ என்ற அணிகளுக்கு $\text{Adj }(AB) = (\text{Adj } B)\,(\text{Adj } A)$ என்பதைச் சரிப்பார்க்கவும்.

6) $A = (a_{ij})$, என்ற வரிசை இரண்டு உடைய அணியில் $a_{ij} = i+j$, எனில், அணி A யை எழுதி $|\text{Adj } A| = |A|$ என்பதைச் சரிபார்க்கவும்.

7) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ என்ற அணிக்கு $|\text{Adj } A| = |A|^2$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

8) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் நேர்மாறு அணியை எழுதுக.

9) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் நேர்மாறு காண்க.

10) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் நேர்மாறு காண்க.

11) $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$, இங்கு a_1, a_2, a_3 என்பன பூச்சியமல்ல எனில் A^{-1} ஐக் காண்க.

12) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ எனில், A இன் நேர்மாறு A தான் என்று காட்டுக.

13) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ எனில், A ஐக் காண்க.

14) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} \\ \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} \\ -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}$ என்பன ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறு என்று காட்டுக.

15) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ எனில் A^{-1} ஐக் காண்க. அதன் வாயிலாக $4A^{-1} = 10\ I - A$ எனக் காட்டுக.

16) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ எனில் $(A^{-1})^{-1} = A$ என்பதைச் சரிபார்க்கவும்

17) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ எனில், $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ என்பதைச் சரிபார்க்கவும்

18) $\begin{pmatrix} 6 & 7 & -1 \\ 3 & \lambda & 5 \\ 9 & 11 & \lambda \end{pmatrix}$ என்ற அணிக்கு நேர்மாறு இல்லையெனில் λ இன் மதிப்பு காண்க.

19) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & p & q \end{pmatrix}$ எனில் $Y = X^{-1}$ என்று அமையுமாறு p, q இன் மதிப்புகளைக் காண்க.

20) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 14 \\ 29 \end{pmatrix}$, எனில் அணி X ஐக் காண்க.

1.2 நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுதிகள் (SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS)

1.2.1 ***ஓர் அணியின் உள் அணிகள்*** (submatrices) ***மற்றும் சிற்றணிகள்*** (minors)

A என்ற ஓர் அணியிலிருந்து அதன் சில நிரைகளையும்

நிரல்களையும் தவிர்த்துக் கிடைக்கும் அணிகள் A இன் **உள் அணிகள்** ஆகும்.

எ.கா. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ எனில், அதன் சில உள் அணிகள்:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ மற்றும் } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

சதுர உள் அணிகளின் அணிக்கோவைகள் அந்த அணியின் **சிற்றணிகள்** என்றழைக்கப்படும். A இன் சிற்றணிகளில் சில :

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \text{ மற்றும் } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

1.2.2 *அணியின் தரம்* (Rank of a matrix).

A என்ற பூச்சிய அணி அல்லாத ஓர் அணியின் $\rho(A)$ என குறிக்கப்படும் தரம் 'r' என்ற மிகை முழு எண்ணாக இருக்க

(i) A இன் 'r' வரிசையுடைய ஏதேனும் ஓர் சிற்றணியாவது பூச்சியமற்று இருக்க வேண்டும். மேலும்

(ii) 'r' வரிசையை விட அதிக வரிசையுடைய A இன் எல்லா சிற்றணிகளும் பூச்சியமாக இருக்க வேண்டும்.

குறிப்பு

(i) A என்ற அணியின் தரம் என்பது அந்த அணியின் பூச்சிய மதிப்பில்லாத சிற்றணிகளின் வரிசைகளில் மீப்பெரு எண் ஆகும்.

(ii) A இன் வரிசை $m \times n$ எனில் $\rho(A) \leq \{m, n$ களில் சிறிய எண் $\}$

(iii) பூச்சிய அணியின் தரம் பூச்சியமாகும்.

(iv) பூச்சிய அணி அல்லாத அணி A-ன் தரம் $\rho(A) \geq 1$ ஆகும்.

(v) $n \times n$ வரிசையுடைய பூச்சியக் கோவை அணி அல்லாத அணியின் தரம் n ஆகும்.

(vi) $\rho(A) = \rho(A^t)$

(vii) $\rho(I_2) = 2, \quad \rho(I_3) = 3$

எடுத்துக்காட்டு 7

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$ **என்ற அணியின் தரம் காண்க.**

தீர்வு :

A இன் வரிசை 3 x 3. $\therefore \rho(A) \leq 3$. A-யில் உள்ள ஒரே ஒரு மூன்றாம் வரிசை சிற்றணி

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

வரிசை மூன்று உடைய சிற்றணி பூச்சியமாக இல்லை.

$\therefore \rho(A) = 3$

எடுத்துக்காட்டு 8

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$ **என்ற அணியின் தரம் காண்க.**

தீர்வு :

A இன் வரிசை 3 x 3. $\therefore \rho(A) \leq 3$. A- யில் உள்ள ஒரே ஒரு மூன்றாம் வரிசை சிற்றணி

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

A-யில் உள்ள ஒரே ஒரு மூன்றாம் வரிசை உடைய சிற்றணியும் பூச்சியமாக உள்ளது, $\therefore \rho(A) \leq 2$

வரிசை இரண்டு உடைய சிற்றணிகளைக் காண்போம்.

அவற்றில் $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

பூச்சியம் அல்லாத இரண்டாம் வரிசை சிற்றணி உள்ளது.

$\therefore \rho(A) = 2.$

எடுத்துக்காட்டு 9

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{10} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{-12} & \mathbf{-15} \end{pmatrix}$$ **என்ற அணியின் தரம் காண்க.**

தீர்வு :

A இன் வரிசை 3 x 3. $\therefore \rho(A) \le 3$

A- யில் உள்ள வரிசை மூன்று உடைய ஒரே ஒரு சிற்றணி

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 10 \\ -6 & -12 & -15 \end{vmatrix} = 0 \qquad (R_1 \propto R_2)$$

எனவே $\rho(A) \le 2$

வரிசை இரண்டு உடைய சிற்றணிகளைக் காண்போம். அவை அனைத்தும் பூச்சிய மதிப்புடையன என்பது வெளிப்படை.

$\therefore \rho(A) \le 1$

A என்பது பூச்சிய அணி அல்ல. $\therefore \rho(A) = 1$

எடுத்துக்காட்டு 10

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{4} & \mathbf{7} \\ \mathbf{9} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$ **என்ற அணியின் தரம் காண்க.**

தீர்வு :

A இன் வரிசை 2 x 4. $\therefore \rho(A) \le 2$

வரிசை இரண்டு உடைய சிற்றணிகளைக் காண்போம். அவற்றில்

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 28 \ne 0$$

வரிசை இரண்டு உடைய பூச்சியம் அல்லாத சிற்றணி உள்ளது.

$\therefore \rho(A) = 2$

எடுத்துக்காட்டு 11

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{8} & \mathbf{1} & \mathbf{9} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$$ **என்ற அணியின் தரம் காண்க.**

தீர்வு :

A இன் வரிசை 3 x 4. $\therefore \rho(A) \le 3$.

வரிசை மூன்று உடைய சிற்றணிகளைக் காண்போம் அவற்றில்

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 8 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -40 \neq 0$$

வரிசை மூன்று உடைய பூச்சியம் அல்லாத சிற்றணி உள்ளது.
$\therefore \rho(A) = 3.$

1.2.3 அடிப்படைச் செயல்களும், சமான அணிகளும் (Elementary operations and equivalent matrices)

ஓர் அணியின் தரம் காண நாம் விழையும் போது துவக்கத்திலேயே பூச்சியமற்ற சிற்றணி கிடைக்கப் பெறாவிடில் தரம் காணும் முயற்சி கடினமானதாகிவிடும். இந்தப் பிரச்சனையைத் தீர்க்க **அடிப்படைச் செயல்கள்** வாயிலாக அணியில் பல பூச்சியங்களைப் புகுத்தி சிற்றணிகளின் மதிப்புகளைக் காணும் வேலையை எளிதாக்குகிறோம். அடிப்படைச் செயல்களை செயல்படுத்துவதால் ஓர் அணியின் தரம் மாறாது என நிருபிக்க முடியும்.

பின்வருவன அடிப்படைச் செயல்களாகும்.

(i) இரு நிரைகளைப் பரிமாற்றம் செ–தல்.

(ii) ஒரு நிரையை பூச்சியம் அல்லாத எண்ணால் பெருக்குதல்

(iii) ஒரு நிரையின் மடங்குகளை மற்றொரு நிரையுடன் கூட்டுதல்.

A என்ற அணியில் குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கை உள்ள அடிப்படைச் செயல்கள் மூலம் B என்ற அணி பெறப்படுமாயின் A மற்றும் B அணிகள் **சமான அணிகள்** எனப்படும். இதை $A \sim B$ என்று குறிப்போம்.

மேலும் கொடுக்கப்பட்ட அணியில் பல பூச்சியங்களை புகுத்தும் போது அணியை ஒரு **முக்கோண அமைப்புக்கு** (triangular form) மாற்றுவது நல்லது. ஆனால் இவ்வாறு தான் செ–ய வேண்டுமென்பதில்லை.

$A = (a_{ij})$ என்ற அணியில் $i > j$ எனும்போது $a_{ij} = 0$ எனில் அணி, ஒரு முக்கோண அமைப்பில் இருப்பதாகச் சொல்லப்படும்,

எ.கா. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ என்ற அணி ஒரு முக்கோண அமைப்பில் உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 12

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{14} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$ **என்ற அணியின் தரம் காண்க.**

தீர்வு :

A இன் வரிசை 3 x 4. $\therefore \rho(A) \le 3$.

அணியை ஒரு முக்கோண அமைப்பிற்கு மாற்றம் செ–வோம்.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 14 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_3$- ஐ செயல்படுத்தினால்

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 14 & 4 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 5R_1$ ஐ செயல்படுத்தினால்

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 8R_2$ ஐ செயல்படுத்தினால்

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & -4 \end{pmatrix}$$

இது ஒரு முக்கோண அமைப்பில் உள்ளது.

இதில் $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -12 \end{vmatrix} = -12 \ne 0$

வரிசை மூன்றுடைய பூச்சியம் அல்லாத சிற்றணி உள்ளது. $\therefore \rho(A) = 3$.

எடுத்துக்காட்டு 13

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$ **என்ற அணியின் தரம் காண்க.**

தீர்வு :

A இன் வரிசை 3 x 4. $\therefore \rho(A) \le 3$

அணியை ஒரு முக்கோண அமைப்பிற்கு மாற்றம் செ–வோம்.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - R_1$,

$R_3 \to R_3 - 2R_1$ இவைகளைச் செயல்படுத்தினால்

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + R_2$ ஐ செயல்படுத்தினால்

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

இது ஒரு முக்கோண அமைப்பில் உள்ளது.

இதில்,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = -16 \ne 0$$

வரிசை மூன்று உடைய பூச்சியம் அல்லாத சிற்றணி உள்ளது.

$\therefore \rho(A) = 3.$

எடுத்துக்காட்டு 14

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$ **என்ற அணியின் தரம் காண்க.**

தீர்வு :

A இன் வரிசை 3 x 4. $\therefore \rho\ (A) \le 3.$

அணியை ஒரு முக்கோண அமைப்பிற்கு மாற்றுவோம்

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to \frac{R_3}{4}$ ஐ செயல்படுத்தினால்

$$\sim \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_3$ ஐ செயல்படுத்தினால்

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 3R_1$,
$R_3 \to R_3 - 4R_1$ இவைகளைச் செயல்படுத்தினால்

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + R_2$ ஐ செயல்படுத்தினால்

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & -11 & 8 \end{pmatrix}$$

இது ஒரு முக்கோண அமைப்பில் உள்ளது.

இதில், $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$

மூன்று வரிசை உடைய பூச்சியம் அல்லாத சிற்றணி உள்ளது.
$\therefore \rho(A) = 3$

1.2.4 நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுதிகள்.

மாறிகள் ஒன்றாம் படியில் மட்டும் இருக்கும் (ஒருங்கமை) சமன்பாடுகளின் தொகுதி **நேரியல்** சமன்பாடுகளின் தொகுதி எனப்படும்.

நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுதியை AX = B என்று எழுதலாம், எடுத்துக்காட்டாக $x-3y+z=-1$, $2x+y-4z=-1$, $6x-7y+8z=7$ என்ற சமன்பாடுகளை

$$\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 2 & 1 & -4\\ 6 & -7 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 7\end{pmatrix}$$ என்று அணி அமைப்பில்

எழுதலாம். A X = B

A க்கு **குணக அணி** (coefficient matrx) என்று பெயர், A உடன் அதன் வலதுபுறம் B அணியை ஒரு நிரலாக இணைத்துப் பெறும் அணி,

$$\begin{pmatrix}1 & -3 & 1 & \vdots & -1\\ 2 & 1 & -4 & \vdots & -1\\ 6 & -7 & 8 & \vdots & 7\end{pmatrix}$$ என்ற **மிகைப்படுத்தப்பட்ட அணி (augmented matrix)** ஆகும்.

இதை (A, B) எனக் குறிப்போம்.

நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுதி ஒன்றில் உள்ள ஒவ்வொரு சமன்பாட்டின் தனி உறுப்பும் பூச்சியமாக இருந்தால் அத்தொகுதி **சம படித்தான தொகுதி (homogeneous system)** ஆகும். ஒரு நேரியல் சம படித்தான சமன்பாடுகளின் தொகுதியை AX = O என எழுதலாம். எடுத்துக்காட்டாக $3x+4y-2z=0$, $5x+2y=0$, $3x-y+z=0$ என்ற சமன்பாடுகளை

$$\begin{pmatrix}3 & 4 & -2\\ 5 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$ என்று அணி அமைப்பில் எழுதலாம்.

A X = O

1.2.5 சமன்பாடுகளின் ஒப்புமைத்தன்மை (Consistency of equations)

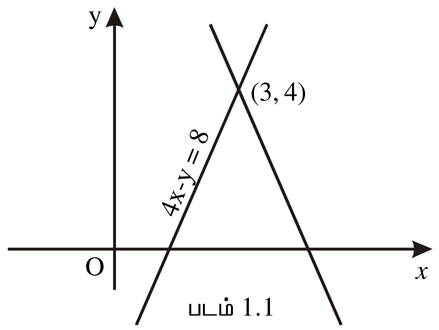
ஒரு சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்கு குறைந்தது ஒரு தீர்வேனும் இருக்குமானால் அத்தொகுதி **ஒப்புமைத்தன்மை உடைய** தொகுதி எனப்படும். இல்லையெனில் **ஒப்புமைத்தன்மை அற்ற தொகுதி** எனப்படும்.

ஒப்புமைத்தன்மை உடைய சமன்பாட்டுத் தொகுதிக்கு

(i) ஒரே ஒரு தீர்வு (unique solution) அல்லது (ii) எண்ணற்ற தீர்வுகள் (infinite sets of solution) இருக்கலாம்.

இதை விளக்கும் வகையில் முதலில் இரு மாறிகளைக் கொண்ட நேரியல் தொகுதிகளைப் பார்ப்போம்.

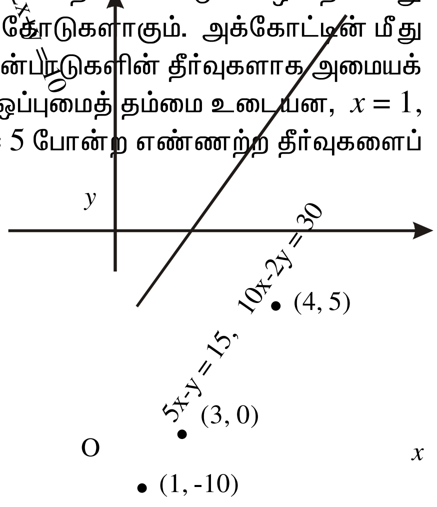
$4x-y = 8$, $2x + y = 10$ என்ற சமன்பாடுகள் **(3. 4)** என்ற புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ளும் இரு நேர்கோடுகளைக் குறிக்கின்றன. அவை $x = 3$, $y = 4$ என்ற ஒரே ஒரு தீர்வைக் கொண்ட ஒப்புமைத் தன்மை உடையனவாகும். (படம். 1.1)



படம் 1.1

ஒப்புமைத்தன்மை உடையன; ஒரே ஒரு தீர்வு,

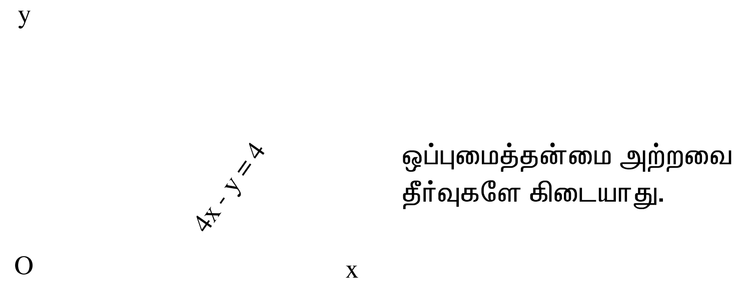
$5x - y = 15$, $10x - 2y = 30$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒன்றன் மீது மற்றொன்றாக அமையும் இரு நேர் கோடுகளாகும். அக்கோட்டின் மீது உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் அச்சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளாக அமையக் காண்கிறோம். இச்சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத் தம்மை உடையன, $x = 1$, $y = -10$; $x = 3$, $y = 0$; $x = 4$, $y = 5$ போன்ற எண்ணற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றுள்ளன.



படம் 1.2

ஒப்புமைத்தன்மை உடையன; எண்ணற்ற தீர்வுகள்.

$4x - y = 4$, $8x - 2y = 5$ என்பன இரு இணைகோடுகளைக் குறிக்கின்றன. அவைகள் ஒப்புமைத் தன்மை அற்ற சமன்பாடுகள் ஆகும். அவற்றிற்கு தீர்வுகளே கிடையாது. (படம். 1.3)



படம் 1.3

இப்போது மூன்று மாறிகளில் அமையும் நேரியல் தொகுதிகளைக் காண்போம். எடுத்துக்காட்டாக $2x + 4y + z = 5$, $x + y + z = 6$, $2x + 3y + z = 6$ என்பன ஒப்புமைத் தன்மை உடையவை. இவை $x = 2$, $y = -1$, $z = 5$ என்ற ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற்றுள்ளன. $x + y + z = 1$, $x + 2y + 4z = 1$, $x + 4y + 10z = 1$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத் தன்மை உள்ளவைதான், ஆனால் $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$; $x = 3$, $y = -3$, $z = 1$ போன்ற எண்ணற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றுள்ளன. அத்தகைய எண்ணற்ற தீர்வுகள் அனைத்தும் $x = 1+2k$, $y = -3k$, $z = k$ என்பதில் அடங்கும் (இதில் k என்பது ஒரு மெய்யெண் ஆகும்).

$x + y + z = -3$, $3x + y - 2z = -2$, $2x + 4y + 7z = 7$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு ஒரு தீர்வு கூட இல்லை. அவை ஒப்புமைத் தன்மை அற்ற சமன்பாடுகள் ஆகும்.

எல்லா சமபடித்தான சமன்பாடுகளுக்கும் $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ என்ற **பூச்சியத் தீர்வுகள் (trivial solutions)** உண்டு. எனவே எல்லா சமபடித்தான சமன்பாடுகளும் ஒப்புமைத் தன்மை உடையன. சமபடித்தான சமன்பாடுகளைப் பொறுத்தவரையில் ஒப்புமைத் தன்மை உடையனவா இல்லையா என்ற கேள்விக்கே இடமில்லை. சமபடித்தான சமன்பாடுகளுக்கு பூச்சிய தீர்வுகளோடு மற்ற தீர்வுகளும் இருக்கலாம் அல்லது இல்லாமலும் இருக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக $x + 2y + 2z = 0$, $x - 3y - 3z = 0$, $2x + y - z = 0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு $x = 0$, $y = 0$,

$z = 0$ என்ற பூச்சிய தீர்வுகள் மட்டுமே உள்ளன. ஆனால் $x + y - z = 0$, $x - 2y + z = 0$, $3x + 6y - 5z = 0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$; $x = 3$, $y = 6$, $z = 9$ போன்ற எண்ணற்ற தீர்வுகள் உள்ளன. அவை அனைத்தும் $x = t$, $y = 2t$, $z = 3t$ என்பதில் அடங்கும். (t என்பது ஒரு மெ–யெண் ஆகும்)

1.2.6 அணியின் தரம் வாயிலாக சமன்பாடுகளின் ஒப்புமைத் தன்மையை ஆரா-தல் (Testing the consistency of equations by rank method)

'n' மாறிகளில் உள்ள $AX = B$ என்ற சமன்பாடுகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

1) $\rho(A, B) = \rho(A)$ எனில், சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத்தன்மை உடையனவாக இருக்கும்.

2) $\rho(A, B) \neq \rho(A)$ எனில், சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத்தன்மை அற்றவையாக இருக்கும்.

3) $\rho(A, B) = \rho(A) = n$ எனில், சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத்தன்மையில் ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற்றிருக்கும்.

4) $\rho(A, B) = \rho(A) < n$ எனில், சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத்தன்மையில் எண்ணற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்.

'n' மாறிகளில் $AX=0$ என்ற சமன்பாடுகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

1) $\rho(A) = n$ எனில், சமன்பாடுகளுக்கு பூச்சியத் தீர்வுகள் மட்டுமே உண்டு.

2) $\rho(A) < n$ எனில், சமன்பாடுகளுக்கு பூச்சியத் தீர்வுகளுடன் மற்ற தீர்வுகளும் உண்டு.

எடுத்துக்காட்டு 15

$2x - y + z = 7$, $3x + y - 5z = 13$, $x + y + z = 5$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத்தன்மையுடையன என்றும், தீர்வுகள் ஒருமைத் தன்மையுடையன என்றும் காட்டுக.

தீர்வு :

சமன்பாடுகளின் அணி வடிவம்

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad X = B$$

இதில்,

$$(A, B) = \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & -5 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad R_1 \leftrightarrow R_3$$ ஐ செயல்படுத்தினால்

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 1 & 7 \end{array}\right) \quad R_2 \to R_2 - 3R_1$$

$R_3 \to R_3 - 2R_1$ இவைகளைச் செயல்படுத்தினால்

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -8 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right) \quad R_3 \to R_3 - \frac{3}{2} R_2$$ ஐ செயல்படுத்தினால்

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\rho(A, B) = 3, \rho(A) = 3$ என்பது வெளிப்படை.

மாறிகளின் எண்ணிக்கை **3**,

எனவே

$\rho(A, B) = \rho(A) =$ மாறிகளின் எண்ணிக்கை.

$\therefore$ இந்தச் சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத் தன்மை உடையன. மேலும் தீர்வுகள் ஒருமைத் தன்மையுடையன.

எடுத்துக்காட்டு 16

***$x + 2y = 3, y - z = 2, x + y + z = 1$* என்ற சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத்தன்மை உடையன என்றும் எண்ணற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றுள்ளன என்றும் காட்டுக.**

தீர்வுகள் :

சமன்பாடுகளின் அணி அமைப்பு

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \quad X = B$$

இதில், $(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$

$R_3 \to R_3 - R_1$ ஐ செயல்படுத்தினால்

$$(A, B) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & -2 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + R_2$ ஐ செயல்படுத்தினால்

$$(A, B) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\rho(A, B) = 2, \; \rho(A) = 2$ என்பது வெளிப்படை. மாறிகளின் எண்ணிக்கை 3.

எனவே $\rho(A, B) = \rho(A) <$ மாறிகளின் எண்ணிக்கை.

$\therefore$ இந்தச் சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத்தன்மை உடையன. மேலும் எண்ணற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 17

$x - 3y + 4z = 3, \; 2x - 5y + 7z = 6, \; 3x - 8y + 11z = 1$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத்தன்மை அற்றவை என்று காட்டுக.

தீர்வு :

சமன்பாடுகளின் அணி வடிவம்

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \\ 3 & -8 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \quad X = B$$

இதில்,

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & \vdots & 3 \\ 2 & -5 & 7 & \vdots & 6 \\ 3 & -8 & 11 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1$,
$R_3 \to R_3 - 3R_1$ இவைகளைச் செயல்படுத்தினால்

$$(A, B) \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -8 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_2$ ஐ செயல்படுத்தினால்

$$(A, B) \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -8 \end{pmatrix}$$

$\rho(A, B) = 3, \quad \rho(A) = 2$ என்பது வெளிப்படை

எனவே $\rho(A, B) \neq \rho(A)$

$\therefore$ சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத்தன்மை அற்றவை.

எடுத்துக்காட்டு 18

$x + y + z = 0$, $2x + y - z = 0$, $x - 2y + z = 0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு பூச்சியத் தீர்வுகள் மட்டுமே உண்டு எனக்காட்டுக.

தீர்வு :

சமன்பாடுகளின் அணி வடிவம்

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \quad X = O$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1$
$R_3 \to R_3 - R_1$ இவைகளைச் செயல்படுத்தினால்

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 3R_2$ ஐச் செயல்படுத்தினால்

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$\rho (A) = 3$ என்பது வெளிப்படை.

மாறிகளின் எண்ணிக்கை 3.

எனவே $\rho (A) =$ மாறிகளின் எண்ணிக்கை

$\therefore$ இந்தச் சமன்பாடுகளுக்கு பூச்சியத் தீர்வுகள் மட்டுமே உண்டு.

எடுத்துக்காட்டு 19

$3x + y + 9z = 0$, $3x + 2y + 12z = 0$, $2x + y + 7z = 0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு பூச்சியத் தீர்வுகளோடு மற்ற தீர்வுகளும் உண்டு எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

சமன்பாடுகளின் அணி வடிவம்

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 12 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \quad X = O$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 12 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 12 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

$\therefore \rho (A) = 2$

மாறிகளின் எண்ணிக்கை 3.

எனவே $\rho(A) <$ மாறிகளின் எண்ணிக்கை

∴ இந்தச் சமன்பாடுகளுக்கு பூச்சியத் தீர்வுகளோடு மற்ற தீர்வுகளும் உண்டு.

எடுத்துக்காட்டு 20

$2x + 3y - z = 5,\ 3x - y + 4z = 2,\ x + 7y - 6z = k$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத் தன்மையுடைய சமன்பாடுகள் எனில் k இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & \vdots & 5 \\ 3 & -1 & 4 & \vdots & 2 \\ 1 & 7 & -6 & \vdots & k \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 7 & -6 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 7 & -6 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$$

$\rho(A) = 2.$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத் தன்மை உடையனவாக இருக்க வேண்டுமெனில் $\rho(A, B)$ யும் 2 ஆக இருக்க வேண்டும். எனவே (A, B) இன் வரிசை மூன்று உடைய ஒவ்வொரு சிற்றணியும் பூச்சியமாக வேண்டும்.

$$\therefore \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 7 & -6 & k \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \quad k = 8.$

எடுத்துக்காட்டு 21

$x + y + z = 3,\ x + 3y + 2z = 6,\ x + 5y + 3z = k$ என்பன ஒப்புமைத்தன்மை அற்ற சமன்பாடுகள் எனில் k இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 1 & 3 & 2 & \vdots & 6 \\ 1 & 5 & 3 & \vdots & k \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$\rho(A) = 2$ என்பது வெளிப்படை.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத் தன்மை அற்ற சமன்பாடுகளாக இருக்க வேண்டுமெனில் $\rho(A, B)$ என்பது 2 ஆக இருக்கக் கூடாது.

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 1 & 3 & 2 & \vdots & 6 \\ 1 & 5 & 3 & \vdots & k \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - R_1$,
$R_3 \to R_3 - R_1$ இவைகளைச் செயல்படுத்தினால்

$$(A, B) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 4 & 2 & \vdots & k-3 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - 2R_2$ ஐ செயல்படுத்தினால்

$$(A, B) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & k-9 \end{pmatrix}$$

$k \neq 9$ எனில் $\rho(A, B)$ என்பது 2 ஆக இருக்காது.

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத்தன்மை அற்றவையாக இருக்க k ஆனது 9 அல்லாத ஏதேனும் ஒரு மெ–யெண்ணாக இருக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 22

$kx + 3y + z = 0, 3x - 4y + 4z = 0, kx - 2y + 3z = 0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு பூச்சியத் தீர்வுகளோடு மற்ற தீர்வுகளும் இருக்குமாறு k இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$A = \begin{pmatrix} k & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

சமபடித்தான சமன்பாடுகளுக்கு பூச்சியத் தீர்வுகளோடு மற்ற தீர்வுகளும் இருக்க வேண்டுமெனில் $\rho(A)$ என்பது மாறிகளின் எண்ணிக்கையைவிடக் குறைவாக இருக்க வேண்டும்.

$\therefore \rho(A) \neq 3.$

எனவே $\begin{vmatrix} k & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \\ k & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k = \dfrac{11}{4}$

எடுத்துகாட்டு 23

$x + 2y + 2z = 0$, $x - 3y - 3z = 0$, $2x + y + kz = 0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு பூச்சியத் தீர்வுகள் மட்டுமே உண்டெனில் k இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix}$$

சமபடித்தான சமன்பாடுகளுக்கு பூச்சியத் தீர்வுகள் மட்டுமே இருக்க $\rho(A)$ மாறிகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & k \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow k \neq 1.$ அதாவது k ஆனது 1 அல்லாத ஏதேனும் ஒரு மெ–யெண்ணாக இருக்க வேண்டும்.

பயிற்சி 1.2

1) பின்வரும் ஒவ்வொரு அணியின் தரம் காண்க.

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ (v) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ (vi) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -4 & -7 \end{pmatrix}$

(vii) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 9 & 12 & 9 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ (viii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (ix) $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$

2) A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ மற்றும் B = $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 6 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ எனில் A+B மற்றும் AB ஆகியவற்றின் தரம் காண்க.

3) $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$ என்ற அணியின் தரம் **3** க்குக் குறைவாக இருப்பின் (x_1, y_1), (x_2, y_2) மற்றும் (x_3, y_3) என்ற புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமையும் எனக்காட்டுக.

4) $2x + 8y + 5z = 5$, $x + y + z = -2$, $x + 2y - z = 2$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒரே ஒரு தீர்வுடன் ஒப்புமைத்தன்மை கொண்டவை எனக்காட்டுக.

5) $x - 3y - 8z = -10$, $3x + y - 4z = 0$, $2x + 5y + 6z = 13$ என்ற சமன்பாடுகள் எண்ணற்ற தீர்வுகளுடன் ஒப்புமைத்தன்மை கொண்டவை எனக் காட்டுக.

6) $4x - 5y - 2z = 2$, $5x - 4y + 2z = -2$, $2x + 2y + 8z = -1$ என்ற சமன்பாடுகளின் ஒப்புமைத்தன்மையை ஆரா–க.

7) $4x - 2y = 3$, $6x - 3y = 5$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத்தன்மை அற்றவை எனக்காட்டுக.

8) $x + y + z = -3$, $3x + y - 2z = -2$, $2x + 4y + 7z = 7$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத்தன்மை அற்றவை எனக்காட்டுக.

9) $x + 2y + 2z = 0$, $x - 3y - 3z = 0$, $2x + y - z = 0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு $x = 0$, $y = 0$ மற்றும் $z = 0$ என்ற தீர்வுகளைத் தவிர்த்து வேறு தீர்வுகள் கிடையாது எனக்காட்டுக..

10) $x + y - z = 0$, $x - 2y + z = 0$, $3x + 6y - 5z = 0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு பூச்சியத் தீர்வுகளுடன் மற்ற தீர்வுகளும் உண்டு எனக்காட்டுக.

11) $x + 2y - 3z = -2$, $3x - y - 2z = 1$, $2x + 3y - 5z = k$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத்தன்மை உடைய சமன்பாடுகளெனில் k இன் மதிப்பைக் காண்க.

12) $x + y + z = 1, 3x - y - z = 4, x + 5y + 5z = k$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒப்புமைத்தன்மை அற்ற சமன்பாடுகளெனில் k இன் மதிப்பைக் காண்க.

13) $2x - 3y + z = 0, \ x + 2y - 3z = 0, \ 4x - y + kz = 0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு பூச்சியத் தீர்வுகளோடு மற்ற தீர்வுகளும் இருக்குமாறு k இன் மதிப்பைக் காண்க.

14) $x + 2y + 3z = 0, \ 2x + 3y + 4z = 0 \ \ 7x + ky + 9z = 0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு பூச்சியத் தீர்வு அல்லாத வேறு தீர்வுகள் இல்லையெனில் k இன் மதிப்பைக் காண்க.

1.3 நேரியல் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் (SOLUTIONS OF LINEAR EQUATIONS)

1.3.1 அணிகளைப் பயன்படுத்தித் தீர்வு காணல் (Solution by matrix method)

$|A| \neq 0$, எனும் போது $AX = B$ என்ற சமன்பாடுகளின் ஒரே தீர்வு $X = A^{-1}B$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 24

$2x - y = 3, \ 5x + y = 4$ என்ற சமன்பாடுகளை அணி முறையில் தீர்க்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அணிவடிவம்

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad X \quad = \quad B$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

$\therefore$ சமன்பாடுகளின் ஒரே தீர்வு $X = A^{-1}B$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \therefore\ x = 1,\ y = -1$$

எடுத்துக்காட்டு 25

$2x + 8y + 5z = 5$, $x + y + z = -2$, $x + 2y - z = 2$ என்ற சமன்பாடுகளை அணிகளைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அணி வடிவம்

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \quad X = B$$

இணைக்காரணிகள்		
+(−1−2),	−(−1−1),	+(2−1)
-(−8−10),	+(−2−5),	−(4−8)
+(8−5),	−(2−5),	+(2−8)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$$

$\therefore$ சமன்பாடுகளின் ஒரே தீர்வு

$X = A^{-1}B$ ஆகும்.

இப்போது A^{-1} ஐக் காண்போம்.

$$A_c = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 18 & -7 & 4 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A_c^t = \begin{pmatrix} -3 & 18 & 3 \\ 2 & -7 & 3 \\ 1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A_c^t = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -3 & 18 & 3 \\ 2 & -7 & 3 \\ 1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

எனவே,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -3 & 18 & 3 \\ 2 & -7 & 3 \\ 1 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -45 \\ 30 \\ -15 \end{pmatrix} \text{ ie., } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x = -3,\ y = 2,\ z = -1.$$

எடுத்துக்காட்டு 26

ஒரு பெண்மணி 8%, $8\frac{3}{4}\%$ மற்றும் 9% தனி வட்டி வீதங்களில் வெவ்வேறு முதலீடுகள் செ-தார். அவர் மொத்தத்தில் ரூ.40,000 முதலீடு செ-துள்ளார். ஆண்டுக்கு ரூ.3,455 வட்டி பெறுகிறார். அவர் 9% இல் 8% விட ரூ.4,000 அதிகமாக முதலீடு செ-துள்ளார் எனில் ஒவ்வொரு சதவீதத்திலும் முதலீடு செ-துள்ளது எவ்வளவு? தீர்வை அணிமுறையில் கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு :

8%, $8\frac{3}{4}\%$ மற்றும் 9% இல் செ–யப்பட்ட முதலீடுகள் முறையே ரூ.x, ரூ. y மற்றும் ரூ. z என்க

கணக்கின்படி $x + y + z = 40000$

$$\frac{x \times 8 \times 1}{100} + \frac{35 \times y \times 1}{400} + \frac{9 \times z \times 1}{100} = 3455 \text{ மற்றும்}$$

$$z - x = 4000 \Rightarrow x + y + z = 40000$$

$$32x + 35y + 36z = 1382000$$

$$x - z = -4000$$

இச்சமன்பாடுகளின் அணி அமைப்பு

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 32 & 35 & 36 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40000 \\ 1382000 \\ -4000 \end{pmatrix}$$

$$A \quad X = B$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 32 & 35 & 36 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$\therefore$ சமன்பாடுகளின் ஒரே தீர்வு $X = A^{-1}B$

நாம் இப்போது A^{-1} ஐக் காணலாம்.

$$A_c = \begin{pmatrix} -35 & 68 & -35 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

இணைக்காரணிகள்		
+(-35-0),	-(-32-36),	+(0-35)
-(-1-0),	+(-1-1),	-(0-1)
+(36-35),	-(36-32),	+(35-32)

$$A^t_c = \begin{pmatrix} -35 & 1 & 1 \\ 68 & -2 & -4 \\ -35 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^t_c = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -35 & 1 & 1 \\ 68 & -2 & -4 \\ -35 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -35 & 1 & 1 \\ 68 & -2 & -4 \\ -35 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 40{,}000 \\ 13{,}82{,}000 \\ -4{,}000 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -22{,}000 \\ -28{,}000 \\ -30{,}000 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11{,}000 \\ 14{,}000 \\ 15{,}000 \end{pmatrix}$$

எனவே 8%, $8\frac{3}{4}$ % மற்றும்9% இல் செ—த முதலீடுகள் முறையே ரூ. 11,000, ரூ. 14,000 மற்றும் ரூ. 15,000 ஆகும்.

1.3.2 அணிக்கோவை முறையில் தீர்வு காணல் (Solution by determinant method).

கிராமரின் விதி (Cramer's rule)

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1,\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

என்ற சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$ என்க

$\Delta \neq 0$, எனும்போது ஒரே தீர்வு

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 27

$x + 2y + 5z = 23$, $3x + y + 4z = 26$, $6x + y + 7z = 47$ என்ற சமன்பாடுகளை அணிக்கோவை முறையில் தீர்க்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள்

$$x + 2y + 5z = 23$$
$$3x + y + 4z = 26$$
$$6x + y + 7z = 47$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -6 \neq 0; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 23 & 2 & 5 \\ 26 & 1 & 4 \\ 47 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -24$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 23 & 5 \\ 3 & 26 & 4 \\ 6 & 47 & 7 \end{vmatrix} = -12 \quad ; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 23 \\ 3 & 1 & 26 \\ 6 & 1 & 47 \end{vmatrix} = -18$$

கிராமரின் விதிப்படி

$$\therefore \; x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-24}{-6} = 4 \quad ; \qquad y = \qquad = \frac{-12}{-6} = 2$$

$$z = \qquad = \frac{-18}{-6} = 3 \quad ; \Rightarrow \; x = 4, \; y = 2, \; z = 3.$$

எடுத்துக்காட்டு 28

$2x - 3y - 1 = 0$, $5x + 2y - 12 = 0$ என்ற சமன்பாடுகளை கிராமரின் விதியைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் $2x - 3y = 1,\quad 5x + 2y = 12$

$$\Delta \quad = \quad = 19 \neq 0 \quad ; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 38$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 19 \quad ;$$

கிராமரின் விதிப்படி,

$$\therefore\ x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{38}{19} = 2\,,\quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{19}{19} = 1$$

$\Rightarrow x = 2,\quad y = 1.$

எடுத்துக்காட்டு 29

வெவ்வேறு தரகு வீதங்களையுடைய A, B, C என்ற மூன்று பொருள்களை கடந்த மூன்று மாதங்களில் ஒரு விற்பனையாளர் விற்பனை செ-ததற்கான விவரங்கள் கீழேயுள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

மாதங்கள்	**விற்பனை செ-த அலகுகள்**			**பெற்ற மொத்த தரகு (ருபாயில்)**
	A	**B**	**C**	
சனவரி	**90**	**100**	**20**	**800**
பிப்ரவரி	**130**	**50**	**40**	**900**
மார்ச்	**60**	**100**	**30**	**850**

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

A, B, C என்ற பொருள்களுக்கான தரகு வீதத்தைக் காண்க. கிராமரின் முறையில் தீர்க்கவும்.

தீர்வு :

A, B மற்றும் C இன் தரகு வீதங்கள் ஓர் அலகுக்கு முறையே x, y மற்றும் z ரூபா-கள் என்க.

கணக்கின்படி

$$90x + 100y + 20z = 800$$
$$130x + 50y + 40z = 900$$
$$60x + 100y + 30z = 850$$

ஒவ்வொரு சமன்பாட்டையும் முழுவதும் **10** ஆல் வகுப்பதால்

$$9x + 10y + 2z = 80$$
$$13x + 5y + 4z = 90$$
$$6x + 10y + 3z = 85$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 10 & 2 \\ 13 & 5 & 4 \\ 6 & 10 & 3 \end{vmatrix} = -175 \neq 0 \ ; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 80 & 10 & 2 \\ 90 & 5 & 4 \\ 85 & 10 & 3 \end{vmatrix} = -350$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 9 & 80 & 2 \\ 13 & 90 & 4 \\ 6 & 85 & 3 \end{vmatrix} = -700 \quad ; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 9 & 10 & 80 \\ 13 & 5 & 90 \\ 6 & 10 & 85 \end{vmatrix} = -1925$$

கிராமரின் விதிப்படி,

$$\therefore \ x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-350}{-175} = 2 \ ; \quad y = \quad = \frac{-700}{-175} = 4$$

$$z = \quad = \frac{-1925}{-175} = 11$$

எனவே A, B மற்றும் Cக்கான தரகு வீதங்கள் முறையே ரூ.**2**, ரூ.**4** மற்றும் ரூ.**11** ஆகும்.

பயிற்சி 1.3

1) அணி முறையில் பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க :
$2x + 3y = 7, \quad 2x + y = 5.$

2) பின்வரும் சமன்பாடுகளை அணிமுறையில் தீர்க்க :
$x - 2y + 3z = 1, \ 3x - y + 4z = 3, \ 2x + y - 2z = -1$

3) பின்வரும் சமன்பாடுகளை கிராமரின் விதிப்படித் தீர்க்க :
$6x - 7y = 16, \quad 9x - 5y = 35.$

4) அணிக்கோவை முறையில் தீர்க்க :
$2x + 2y - z - 1 = 0, \ x + y - z = 0, \ 3x + 2y - 3z = 1.$

5) கிராமரின் விதிப்படித் தீர்க்க: $x + y = 2, \ y + z = 6, \ z + x = 4.$

6) ஒரு சிறிய தொழிற்கூடத்தில் P, Q என்ற இருவிதமான வானொலிப் பெட்டிகள் தயாரிக்கப்படுகின்றன. அதற்கு A, B என்ற இரு விதமான வால்வுகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. P என்ற வானொலிப்

பெட்டிக்கு இரண்டு A வால்வுகளும், மூன்று B வால்வுகளும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. Q என்ற வானொலிப் பெட்டிக்கு மூன்று A வால்வுகளும், நான்கு B வால்வுகளும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. மொத்தத்தில் 130 A வால்வுகளும், 180 B வால்வுகளும் அந்த தொழிற்கூடத்தில் பயன்படுத்தப்பட்டிருப்பின் தயாரிக்கப்பட்ட வானொலிப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கையை அணிமுறையில் காண்க.

7) 2 கிலோ கோதுமை மற்றும் 1 கிலோ சர்க்கரையின் விலை ரூ.7; 1 கிலோ கோதுமை மற்றும் 1 கிலோ அரிசியின் விலை ரூ.7; 3 கிலோ கோதுமை, 2 கிலோ சர்க்கரை மற்றும் 1 கிலோ அரிசியின் விலை ரூ.17 எனில் ஒவ்வொன்றின் விலையையும் அணிமுறையில் காண்க.

8) X, Y மற்றும் Z என்ற மூன்று பொருள்களை A, B மற்றும் C என்ற மூன்று வியாபாரிகள் வாங்கி விற்கிறார்கள். A என்பவர் X இன் 2 அலகுகளையும் Z இன் 5 அலகுகளையும் வாங்கி, Y இன் 3 அலகுகளை விற்கிறார்; B என்பவர் X இன் 5 அலகுகளையும், Y இன் 2 அலகுகளையும் வாங்கி, Z இன் 7 அலகுகளை விற்கிறார்; C என்பவர் Y இன் 3 அலகுகளையும் Z இன் 1 அலகையும் வாங்கி, X இன் 4 அலகுகளை விற்கிறார். இந்த செயல்பாடுகளில் A, ரூ.11 பெறுகிறார் C, ரூ.5 பெறுகிறார் ஆனால் B, ரூ.12 இழக்கிறார். பொருட்கள் X, Y மற்றும் Z ஒவ்வொன்றின் விலையைக் காண்க. அணிக்கோவைகளைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க.

9) ஒரு தொழிற்சாலையில் நாள்தோறும் மூன்று பொருட்கள் உற்பத்தியாகின்றன. ஒரு நாளில் அதன் மொத்த உற்பத்தி 45 டன்களாக உள்ளது. முதல் பொருளின் உற்பத்தியை விட மூன்றாம் பொருளின் உற்பத்தி 8 டன்கள் அதிகமாக உள்ளது. முதல் பொருள் மற்றும் மூன்றாம் பொருளின் மொத்த உற்பத்தி இரண்டாம் பொருளின் உற்பத்தியைப் போல் இரு மடங்கு உள்ளது. கிராமரின் விதியைப் பயன்படுத்தி ஒவ்வொரு பொருளின் உற்பத்தி அளவைக் காண்க.

1.4 *தகவல் பதிவுகள்* (STORING INFORMATION)

கிடைமட்டமாகவும் செங்குத்தாகவும் பிரிக்கக்கூடிய விவரங்களை வசதியாகவும் அடக்கமாகவும் குறிப்பிட அணி முறை வழிவகுக்கிறது என்பதை நாம் அறிவோம்.

கீழ்கண்டவற்றில் அணிகளின் பயன்பாடுகள் பற்றி இங்கு நாம் அறியலாம்.

(i) கணங்கள் மீதான உறவுகள் (Relation on sets).

(ii) திசையிட்ட தடங்கள் (Directed routs).

(ii) இரகசிய தகவல் பரிமாற்றம் (Cryptography).

அதற்கு முன்னதாக முந்தைய வகுப்புகளில் படித்த கணங்கள் மீதான உறவுகள் பற்றி நினைவு கூர்வோம்.

உறவுகள் (Relations)

A என்ற கணத்திலிருந்து B என்ற கணத்திற்கான உறவு R என்பது, கார்டீசியன் பெருக்கல் A X B இன் ஓர் உட்கணம் ஆகும். எனவே R என்பது வரிசைச் சோடிகளின் கணமாகும். அவற்றின் முதல் உறுப்பு A இல் இருந்தும் இரண்டாம் உறுப்பு B இல் இருந்தும் வருகின்றன (a, b) $\in$ R எனில் 'a' என்பது 'b' உடன் உறவுள்ளது என்கிறோம். அதையே $a \, R \, b$ என்று எழுதுகிறோம். (a, b) $\notin$ R எனில் 'a' என்பது 'b' உடன் உறவற்றது. அதை $a \not R b$ என்று எழுதுகிறோம். R என்பது A என்ற கணத்திலிருந்து அதே கணத்திற்கான உறவு எனில் R ஐ A-இன் மீதான உறவு என்போம்.

எடுத்துக்காட்டாக

A = {2, 3, 4, 6} மற்றும் B = {4, 6, 9}என்க.

x ஆனது y ஐ சரியாக வகுக்குமானல் xRy என்று, A யில் இருந்து B க்கு வரையறுக்கப்படும் உறவை R என்க.

அவ்வாறெனில்

R = {(2, 4), (2, 6), (3, 6), (3, 9), (4, 4), (6, 6)} ஆகும்

நேர்மாறு உறவு (Inverse relation)

A என்ற கணத்திலிருந்து B என்ற கணத்திற்கான உறவு R என்க. R இன் நேர்மாறு உறவை R^{-1} என்று எழுதுகிறோம். R^{-1} என்பது B இல் இருந்து A க்கான உறவு ஆகும். R^{-1} இல் உள்ள வரிசைச் சோடிகளை திருப்பினால் அவை R இல் அமையும். எடுத்துக்காட்டாக R = {(1, y) (1, z) (3, y)}என்பது A = {1, 2, 3} இல் இருந்து B = {x, y, z} க்கு வரையறுக்கப்படும் உறவு எனில் R^{-1} = {(y, 1) (z, 1) (y, 3)} என்பது B இல் இருந்து A க்கு அமையும் R இன் நேர்மாறு உறவு ஆகும்.

உறவுகளின் சேர்க்கை (Composition of relations)

R என்பது A என்ற கணத்தில் இருந்து B என்ற கணத்திற்கான உறவு என்க. S என்பது B கணத்திலிருந்து C என்ற கணத்திற்கான உறவு என்க. அதாவது R என்பது A x B இன் உட்கணம், S என்பது B X C-இன் உட்கணம். R∘S என்பது அவ்விரு உறவுகளின் சேர்க்கையாகும். அதனை பின்வருமாறு வரையறுக்கிறோம்.

$R \circ S = \{(a, c) /\ b \in B$ என்ற உறுப்பிற்கு $(a, b) \in R$ மேலும்

$(b, c) \in S\}$. $R \circ S$ $A \times C$

எடுத்துக்காட்டாக

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ மற்றும் $C = \{x, y, z\}$ மேலும்

$R = \{(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)\}$ மற்றும்

$S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}$என்க.

இவ்வாறெனில்

$R \circ S = \{(2, z), (3, x), (3, z)\}$ ஆகும்.

உறவுகளின் வகைகள் (Types of relations)

A என்ற கணத்தின் மீதான R என்ற ஓர் உறவு, **சமனி உறவாக (Reflexive relation)** இருக்க ஒவ்வொரு $a \in A$ க்கும் $(a, a) \in R$ என்றிருக்க வேண்டும்.

A என்ற கணத்தின் மீதான R என்ற ஓர் உறவு **சமச்சீர் உறவாக (Symmetric relation)** இருக்க aRb என்றிருக்கும் போது bRa என்று இருக்க வேண்டும். அதாவது $(a, b) \in R$ எனில் $(b, a) \in R$ என்று இருக்க வேண்டும்.

A என்ற கணத்தின் மீதான R என்ற ஓர் உறவு **தொடர் உறவாக (Transitive relation)** இருக்க aRb மற்றும் bRc என்றிருக்கும் போது aRc என்றிருக்க வேண்டும் அதாவது $(a, b), (b, c) \in R$ எனில் $(a, c) \in R$

R என்ற உறவு சமனி, சமச்சீர் மற்றும் தொடர் உறவுகளாக இருப்பின், R என்பது **சமான உறவு (Equivalence relation)** எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுக $A = \{1, 2, 3\}$ என்ற கணத்தின் மீதான

$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 3)\}$

$S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

$T = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3)\}$

என்ற மூன்று உறவுகளை எடுத்துக்கொண்டால் R என்பது சமனி உறவல்ல, S என்பது சமனி உறவு மற்றும் T என்பது சமனி உறவல்ல. R என்பது சமச்சீர் உறவு அல்ல, S என்பது சமச்சீர் உறவு மற்றும் T என்பது சமச்சீர் உறவல்ல. R என்பது தொடர்உறவு, S என்பது தொடர் உறவு மற்றும் T என்பது தொடர் உறவல்ல.

1.4.1 உறவு அணிகள் (Relation matrices)

X இல் இருந்து Y க்கான உறவை, அணி வாயிலாக வசதியாகக் குறிக்கலாம். அவ்வாறு குறிக்கப்படும் உறவுகளை கணினி மூலம் ஆ–வு செ–யலாம்.

நிரைகளுக்கு X இன் உறுப்புகளைக் கொண்டு (ஏதேனும் ஒரு வரிசையில்) பெயரிடுகிறோம்.

நிரல்களுக்கு Y இன் உறுப்புகளைக் கொண்டு (மீண்டும் ஏதேனும் ஒரு வரிசையில்) பெயரிடுகிறோம்.

$x \, R \, y$ எனில் x ஆவது நிரை y ஆவது நிரல் பதிவில் எண் 1 இடுகிறோம். இல்லையெனில் எண் 0 இடுகிறோம். இவ்வாறு பெறப்படும் அணியே R என்ற உறவின் அணி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 30

x என்பது y ஐ மீதமின்றி வகுத்தால் xRy என்று {2, 3, 4} என்ற கணத்திலிருந்து {5, 6, 7, 8} என்ற கணத்திற்கு வரையறுக்கப்படும் உறவு R இன் உறவு அணியைக் காண்க.

தீர்வு :

$R = \{(2, 6), (2, 8), (3, 6), (4, 8)\}$

R இன் உறவு அணி

$$R = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

எடுத்துக்காட்டு 31

***$m < n$* எனில் *mRn* என்றவாறு S = {1, 2, 3, 4} இன் மீது வரையறுக்கப்படும் R என்ற உறவின் அணியைக் காண்க.**

தீர்வு :

R = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)}

R இன் உறவு அணி

$$R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

எடுத்துக்காட்டு 32

ஓர் உறவு அணி $R = \begin{array}{c} \\ x \\ y \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ எனக் கொடுக்கப்படின் உறவு R ஐ ஒரு வரிசைச் சோடிகளின் கணமாக எழுதுக.

தீர்வு :

R = {(x, 1), (y, 1), (y, 2)}

நேர்மாறு உறவின் அணி (matrix for inverse relation)

R என்பது ஓர் உறவின் அணியெனில் அதன் நிரை நிரல் மாற்று அணி R^t என்பது அதன் நேர்மாறு உறவு R^{-1} ஐக் குறிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 33

***$mn = m$* எனில் *mRn* என A = {0, 1, 2} என்ற கணத்தின் மீது R என்ற உறவு வரையறுக்கப்படுகிறது. R இன் உறவு அணியைக் காண்க. அதைப் பயன்படுத்தி நேர்மாறு உறவு R^{-1} இன் அணியைக் காண்க.**

தீர்வு :

R = {(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (2, 1)}

R இன் உறவு அணி

$$R = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

R^{-1} இன் உறவு அணி

$$R^{-1} = R^t$$

$$= \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

உறவுகளின் சேர்ப்பு அணி (matrix for composition of relations)

அணிப் பெருக்கல் R_1 R_2 இல் பூச்சியமற்ற உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றையும் 1 ஆக மாற்றிப் பெறப்படும் அணி $R_1 \circ R_2$ இன் சேர்ப்பு அணி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 34

$R_1 = \{(1, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$ என்பது $X = \{1, 2, 3\}$ இல் இருந்து Y ={a, b, c,} க்கு உள்ள உறவு. $R_2 = \{(a, x), (a, y), (b, y), (b,z)\}$ என்பது Y இல் இருந்து $Z = \{x, y, z\}$ க்கு உள்ள உறவு எனில் R_1 மற்றும் R_2 உறவுகளுக்கான அணிகளைக் காண்க. அவைகளைப் பயன்படுத்தி $R_1 \circ R_2$ இன் உறவு அணியைக் காண்க.

தீர்வு :

R_1 க்கான உறவு அணி, $R_1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

R_2 க்கான உறவு அணி, $R_2 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

அணிப் பெருக்கல்

$$R_1 R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

R_1 R_2 இல் பூச்சியமற்ற உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றையும் **1** ஆக மாற்றினால்

$$R_1 \circ R_2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

உறவு அணி வெளிப்படுத்தும் உறவின் வகை (Type of relation as revealed by relation matrix)

உறவு அணியின் முதன்மை மூலைவிட்டத்தில் **1** என்ற எண்கள் மட்டுமே இருக்குமானால் அந்த உறவு சமனி உறவாகும்.

உறவு அணி சமச்சீரணியானால் (அதாவது $a_{ij} = a_{ji}$ எல்லா i, j களுக்கும்) அந்த உறவு சமச்சீர் உறவாகும்.

R^2 இன் (i, j) பதிவு பூச்சியம் இல்லாமல் இருக்கும் போதெல்லாம் R இன் (i, j) பதிவும் பூச்சியம் இல்லாமல் இருக்குமானால் அந்த உறவு தொடர் உறவாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 35

A = {*a*, *b*, *c*, *d*} என்ற கணத்தின் மீது R = {(*a*, *a*), (*b*, *b*), (*c*, *c*), (*d*, *d*), (*b*, *c*), (*c*, *b*)} என்ற உறவு கொடுக்கப் படுகிறது. R இன் உறவு அணியைக் காண்க. அதைப் பயன்படுத்தி அந்த உறவின் வகையைக் காண்க.

தீர்வு :

R இன் உறவு அணி

$$R = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

முதன்மை மூலைவிட்டத்தில் **1** என்ற எண்கள் மட்டுமே உள்ளன, எனவே R, சமனி உறவாகும்.

R அணி சமச்சீர் அணியாகும். எனவே R, சமச்சீர் உறவாகும்.

அணிப் பெருக்கல்

$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R^2 இல் ஓர் உறுப்பு பூச்சியம் இல்லையெனில் அதற்கு நிகராக R-இல் உள்ள உறுப்பும் பூச்சியம் இல்லாமல் இருக்கிறது. எனவே R, தொடர் உறவாகும்.

எனவே R என்பது சமனி, சமச்சீர் மற்றும் தொடர் உறவாக உள்ளது. எனவே R, சமான உறவாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 36

$|m-n| \leq 1$ எனில் mRn என்று S = {1, 2, 3, 4} என்ற கணத்தின் மீது R என்ற உறவு வரையறுக்கப்படுகிறது. R-இன் உறவு அணியைக் காண்க. அதைப் பயன்படுத்தி R-இன் வகையைக் காண்க.

தீர்வு :

R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)}

R இன் உறவு அணி

$$R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

முதன்மை மூலைவிட்டத்தில் 1 என்ற எண்கள் மட்டுமே உள்ளன. எனவே R, சமனி உறவாகும்

R அணி சமச்சீர் அணியாகும். எனவே R, சமச்சீர்உறவாகும்.

$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

R^2 இல் (1, 3)வது உறுப்பு பூச்சியம் இல்லை, ஆனால் R இல் (1, 3)வது உறுப்பு பூச்சியமாக உள்ளது. எனவே R, தொடர் உறவு அல்ல.

1.4.2 தட அணிகள் (Route matrices)

முனைகள் என்றழைக்கப்படும் P_1, P_2, ..., P_n என்ற புள்ளிகளும், அவற்றில் இரு வெவ்வேறு வரிசைச் சோடி புள்ளிகளை இணைக்கும் திசையிட்ட விளிம்புகளும் ஒரு திசையிட்ட தடத்தை உருவாக்கும். திசையிட்ட விளிம்பு P_{ij} என்பது திசையிட்ட விளிம்பு P_{ji} இல் இருந்து வேறுபட்டதாகும். P_i என்ற முனையிலிருந்து வேறு ஒரு முனைக்கு திசையிட்ட விளிம்பு இல்லாமலிருக்கலாம்; வேறு எந்த ஒரு முனையிலிருந்தும் P_i க்கு திசையிட்ட விளிம்பு இல்லாமலிருக்கலாம். மேலும் எந்த ஒரு முனையிலும் வளையங்கள் கிடையாது. எந்த இரு புள்ளிகளையும் திசையிட்ட பல விளிம்புகள் இணைக்காது எனக் கொள்வோம்.

ஒரு திசையிட்ட தடத்தின் ஒவ்வொரு விளிம்பும், நீளம் 1 உள்ள நிலை என்று அழைக்கப்படும். P_i என்ற முனையிலிருந்து P_j என்ற முனைக்கான **பாதை (Path)** என்பது P_i இல் இருந்து P_j வரையிலான விளிம்புகளின் தொடரினமாகும். அது P_i இல் தொடங்க வேண்டும், P_j இல் முடிய வேண்டும். முனைகள் P_i, P_j உள்பட பாதையில் மீண்டும் மீண்டும் வரலாம்.

P_i இல் இருந்து P_j க்கு ஒரு பாதை இருக்குமானால் P_j , P_i இல் இருந்து **அணுகபடக்கூடியது (accessible)** அல்லது P_i, P_j ஐ **அணுகும் திறன் (access)** கொண்டது எனச் சொல்வோம்.

ஒரு தடத்தில் P_i, P_j என்ற எந்த இரு புள்ளிகளை எடுத்துக் கொண்டாலும் P_i இல் இருந்து P_j க்கு ஒரு பாதையும் P_j இல் இருந்து P_i க்கு ஒரு பாதையும் இருக்குமானால் அந்த தடம் **வலுவாக இணைக்கப்பட்டுள்ளது** என்று சொல்லப்படும். இல்லையெனில் வலுவாக இணைக்கப்படவில்லை எனப்படும்.

ஒரு திசையிட்ட தடத்தை அதன் தட அணியால் குறிக்கலாம். G என்பது 'n' முனைகள் உள்ள ஒரு திசையிட்ட தடம் என்க. $n \times n$ வரிசையுள்ள A என்ற ஓர் அணியில் P_i இல் இருந்து P_j க்கு ஒரு திசையிட்ட விளிம்பு இருப்பின் (i, j) ஆவது உறுப்பு 1 எனவும் இல்லையெனில் 0 எனவும் அமைக்கப்படும் அணி, அந்த திசையிட்ட தடத்தின் **தட அணி** ஆகும்.

தட அணியில் உள்ள 1 என்ற எண்களின் எண்ணிக்கை தடத்திலுள்ள திசையிட்ட விளிம்புகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக

இருக்கும். தட அணிகளும் உறவு அணிகள் தான். ஆனால் தட அணிகள் சதுர அணிகளாகத் தான் இருக்கவேண்டும்; உறவு அணிகள் சதுர அணிகளாக இருக்க வேண்டுமென்பதில்லை.

ஒரு திசையிட்ட தடத்தின் **பாதை அணி (Path matrix)**

$P = \{P_{ij}\}$ என்பது

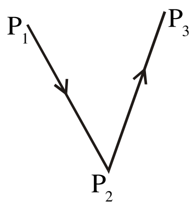
$$P_{ij} = \begin{cases} 1, & P_i \text{ இல் இருந்து } P_j \text{ க்கு ஒரு பாதை இருக்குமானால்} \\ 0, & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

என்று அமையும் அணி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 37

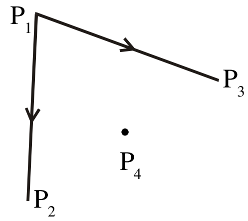
கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு திசையிட்ட தடத்திற்கும் அதன் தட அணியைக் காண்க.

(i)



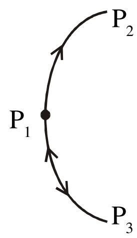
படம் 1.4

(ii)



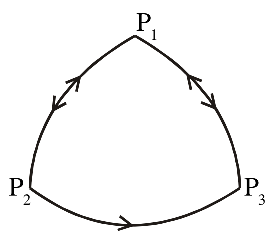
படம் 1.5

(iii)



படம் 1.6

(iv)



படம் 1.7

தீர்வு :

$$\text{(i)}\quad \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{(ii)}\quad \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$
\text{(iii)}\ \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}
\qquad
\text{(iv)}\ \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}
$$

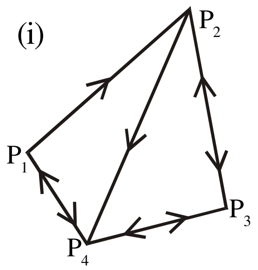
எடுத்துக்காட்டு 38

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு தட அணிக்கும் திசையிட்ட தடம் வரைக.

$$
\text{(i)}\ \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}
\qquad
\text{(ii)}\ \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}
$$

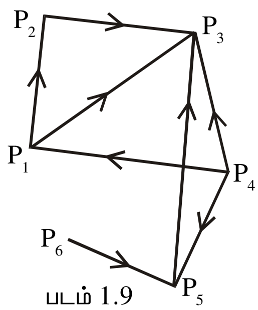
தீர்வு :

(i)



படம் 1.8

(ii)



படம் 1.9

திசையிட்ட தடங்கள் பற்றிய தேற்றங்கள்

ஆறு தேற்றங்கள் (நிரூபணமின்றி) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பின் வருவனவற்றில் **A** என்பது ஒரு தட அணியைக் குறிக்கும் என்க.

தேற்றம் 1

A^r இல் (i, j) -ஆவது உறுப்பு, P_i இல் இருந்து P_j ஐ r நிலைகளில் எத்தனை வழிகளில் அணுகலாமோ அவற்றின் எண்ணிக்கை ஆகும்.

தேற்றம் 2

A^r இல் j நிரலில் உள்ள உறுப்புகளின் கூடுதல், அனைத்து முனைகளிலிருந்தும் P_j ஐ r நிலைகளில் எத்தனை வழிகளில் அணுகலாமோ அவற்றின் எண்ணிக்கை ஆகும்.

தேற்றம் 3

$A + A^2 + A^3 + \ldots + A^r$ இல் (i, j)- ஆவது உறுப்பு, P_i இல் இருந்து P_j ஐ ஒன்று, இரண்டு, ... அல்லது r நிலைகளில் எத்னை வழிகளில் அணுகலாமோ அவற்றின் எண்ணிக்கை ஆகும்.

தேற்றம் 4

$A + A^2 + A^3 + \ldots + A^r$ இல் j நிரலில் உள்ள உறுப்புகளின் கூடுதல், அனைத்து முனைகளிலிருந்தும் P_J ஐ ஒன்று, இரண்டு ... அல்லது r நிலைகளில் எத்தனை வழிகளில் அணுகலாமோ அவற்றின் எண்ணிக்கை ஆகும்.

தேற்றம் 5

n முனைகளையுடைய ஒரு திசையிட்ட தடத்தில் $A + A^2 + A^3 + \ldots + A^n$ இல் பூச்சிய பதிவுகள் இல்லையெனில் அந்த திசையிட்ட தடம் வலுவாக இணைக்கப்பட்ட தடமாகும்

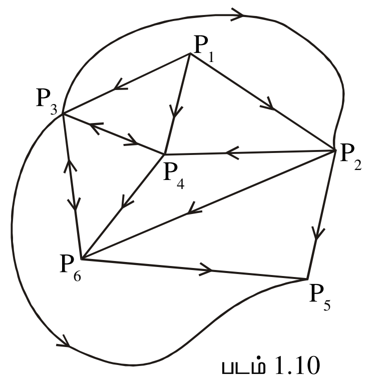
தேற்றம் 6

n முனைகளையுடைய திசையிட்ட தடத்தில் $A + A^2 + A^3 + \ldots + A^n$ இல் பூஜ்ஜியமல்லாத ஒவ்வொரு உறுப்பையும் **1** ஆக மாற்றி பெறப்படும் அணி அந்த திசையிட்ட தடத்தின் பாதை அணி ஆகும்.

இந்த தேற்றங்களின் பயன்பாடுகளை விளக்கும் வகையில் சில எடுத்துக்காட்டுகளை நாம் இப்போது பார்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 39

பின்வரும் G என்ற திசையிட்ட தடத்தை கருத்தில் கொள்க.



படம் 1.10

(i) G இன் தட அணியைக் காண்க.

(ii) P_3 ஐ P_1 இல் இருந்து 3 நிலைகளில் எத்தனை வழிகளில் அணுகலாம் எனக் கண்டுபிடி. நிகரான பாதைகளைக் குறிப்பிடுக.

(iii) P_1 இல் இருந்து P_5 க்கு 3 நிலைகளில் உள்ள பாதைகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. நிகரான பாதைகளைக் குறிப்பிடுக.

(iv) P_6 என்பது மற்றவைகளால் 3 நிலைகளில் எத்தனை வழிகளில் அணுகப்படலாம் என்று கண்டுபிடி.

(v) ஒன்று, இரண்டு அல்லது மூன்று நிலைகளில் P_5 ஐ P_1 எத்தனை வழிகளில் அணுகும் திறன் கொண்டது என்று கண்டுபிடி.

(vi) P_6 என்பது மற்றவைகளால் 3 அல்லது அதற்கு குறைவான நிலைகளில் எத்தனை வழிகளில் அணுகப்படலாம் என்று கண்டுபிடி.

தீர்வு :

(i) G இன் தட அணி

$$A = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(ii)

$$A^2 = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad A^3 = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

P_3 ஐ P_1 இல் இருந்து 3 நிலைகளில் 5 வழிகளில் அணுகலாம்.

பாதைகள் :

$P_1 P_2 P_4 P_3$, $P_1 P_2 P_6 P_3$, $P_1 P_4 P_6 P_3$, $P_1 P_3 P_4 P_3$ மற்றும் $P_1 P_3 P_6 P_3$.

(iii) P_1 இல் இருந்து P_5 க்கு 3 நிலைகளில் உள்ள பாதைகளின் எண்ணிக்கை 5.

அவைகள்

$P_1 P_2 P_6 P_5$, $P_1 P_3 P_2 P_5$, $P_1 P_3 P_6 P_5$, $P_1 P_4 P_6 P_5$ மற்றும் $P_1 P_4 P_3 P_5$

(iv) P_6 என்பது மற்றவைகளால் 3 நிலைகளில் $4 + 2 + 3 + 3 + 0 = 12$ வழிகளில் அணுகப்படலாம்.

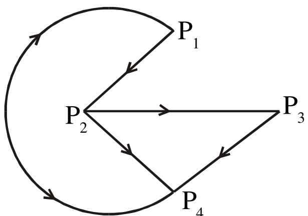
(v) $$A + A^2 + A^3 = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 & 5 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 4 & 7 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

P_5 ஐ P_1 என்பது ஒன்று, இரண்டு அல்லது மூன்று நிலைகளில் 7 வழிகளில் அணுகும் திறன் கொண்டது.

(vi) P_6 மற்றவைகளால் 3 அல்லது அதற்கு குறைவான நிலைகளில் $7 + 4 + 6 + 5 + 0 = 22$ வழிகளில் அணுகப்படலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 40

தட அணியையும் அதன் அடுக்குகளையும் பயன்படுத்தி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள திசையிட்ட தடம் G வலுவாக இணைக்கப்பட்டுள்ளது எனக் காட்டுக.



படம் 1.11

தீர்வு :

G இன் தட அணி

$$A=\begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

4 முனைகள் இருப்பதால் $A + A^2 + A^3 + A^4$ ஐக் கண்டு பிடிப்போம்.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

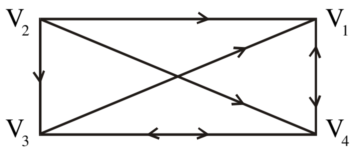
(each matrix has rows and columns labelled P_1, P_2, P_3, P_4)

இதில் பூச்சியப் பதிவுகள் இல்லை.

$\therefore$ G, வலுவாக இணைக்கப்பட்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 41

கீழே திசையிட்ட தடம் G கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 1.12

G இன் தட அணியைக் காண்க. அதன் அடுக்குகளைப் பயன்படுத்தி G, வலுவாக இணைக்கப் பட்டுள்ளதா என்று தீர்மானிக்கவும்.

தீர்வு :

G இன் தட அணி

$$A = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

4 முனைகள் இருப்பதால் $A + A^2 + A^3 + A^4$ ஐக் காண்கிறோம்.

$$A^2 = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \qquad A^3 = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A^4 = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\therefore \quad A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 4 \\ 11 & 0 & 7 & 11 \\ 7 & 0 & 4 & 7 \\ 7 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

இதில் பூச்சியப் பதிவு உள்ளது.

எனவே G, வலுவாக இணைக்கப்படவில்லை

எடுத்துக்காட்டு 42

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ \mathbf{P_1} \\ \mathbf{P_2} \\ \mathbf{P_3} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{P_1} & \mathbf{P_2} & \mathbf{P_3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{array}$$

என்ற தட அணியையுடைய G என்ற தடம் வலுவாக இணைக்கப்பட்டுள்ளது என்று காட்டுக.

தீர்வு:

3 முனைகள் இருப்பதால், $A + A^2 + A^3$ ஐக் காண்கிறோம்.

$$A^2 = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad A^3 = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

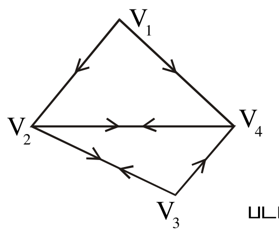
$$\therefore\ A + A^2 + A^3 = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

இதில் பூச்சியப் பதிவுகள் இல்லை

$\therefore$ G, வலுவாக இணைக்கப்பட்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 43

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள திசையிட்ட தடத்தின் அணியின் அடுக்குகளைப் பயன்படுத்தி அந்த தடத்தின் பாதை அணியைக் காண்க.



படம் 1.13

தீர்வு :

தட அணி

$$A = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

4 முனைகள் இருப்பதால் $A + A^2 + A^3 + A^4$ ஐக் காண்கிறோம்.

$$A^2 = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad A^3 = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

$$A^4 = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \; \therefore A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & 4 & 7 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

பூச்சியமல்லாத ஒவ்வொரு பதிவையும் 1 ஆக மாற்றி பாதை அணி P ஐ பெறுகிறோம்.

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

எடுத்துக்காட்டு 44

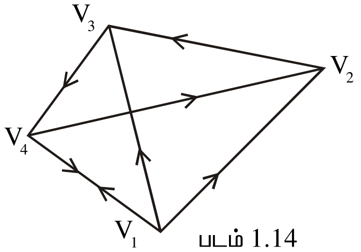
G என்ற திசையிட்ட தடத்தின் அணி

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

எனில், A-இன் அடுக்குகளைப் பயன்படுத்தாமல் G இன் பாதை அணியைக் காண்க.

தீர்வு :

திசையிட்ட தடம் G :



படம் 1.14

G இல் இருந்து பாதை அணியை நேரிடையாக எழுதினால்

$$P = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

1.4.3 இரகசிய தகவல் பரிமாற்றம் (Cryptography)

செ–திகளைச் சங்கேத மொழியில் எழுதவும், சங்கேத மொழியில் எழுதப்பட்ட செ–தியை வெளிக்கொணரவும் பூச்சியக் கோவை அணியாக இல்லாத அணியைச் சிறப்பாக பயன்படுத்தலாம். பின்வரும் எடுத்துக்காட்டு இதனை விளக்குவதாக அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 45

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

என்ற பதிலீட்டுத் திட்டத்தையும் $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ என்ற அணியையும் பயன்படுத்தி

(i) HARD WORK என்பதைச் சங்கேத மொழியில் எழுதுக. மேலும்

(ii) 98, 39, 125, 49, 80, 31 என்ற சங்கேத மொழியின் செ-தியை வெளிக் கொணர்க.

தீர்வு :

(i) பதிலீட்டுத் திட்டப்படி

H	A	R	D	W	O	R	K
8	1	18	4	23	15	18	11

இவைகளை பின்வருமாறு தொகுக்கலாம்.

$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 23 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \end{pmatrix}$

AX = B என்ற உருமாற்றம் செ–தால்

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 102 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 23 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ 61 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 123 \\ 47 \end{pmatrix}$$

சங்கேத மொழிச் செ–தி : 43, 17, 102, 40, 160, 61, 123, 47

(ii) 98, 39, 125, 49, 80, 31

இவைகளை பின்வருமாறு தொகுக்கலாம்

$\begin{pmatrix} 98 \\ 39 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 125 \\ 49 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 80 \\ 31 \end{pmatrix}$

இப்போது AX = B ஐத் தீர்க்கலாம்.

$$\therefore X = A^{-1}B,\ A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 98 \\ 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 125 \\ 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 80 \\ 81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix}$$

எனவே 19, 1, 22, 5, 13, 5

பதிலீட்டு திட்டத்தைப் பயன்படுத்தினால் வெளிக் கொணரப்பட்ட செ–தி : S A V E M E

குறிப்பு

2×2 பூச்சிய அணிக்கோவை அல்லாத அணியைப் பயன்படுத்தும் போது எண்களை வரிசையில் இரண்டிரண்டாக தொகுக்கிறோம். ஓர் எண், சோடி இன்றி இருக்குமானால் நாமாகவே சம்மந்தமில்லாத ஓர் எண்ணைக் கடைசி எண்ணாகச் சேர்த்து பின்னர் அதை தவிர்த்து விடலாம். 3×3 அணியைப் பயன்படுத்தும் போது எண்களை வரிசையில் மூன்று மூன்றாகத் தொகுக்கிறோம். தேவையானால் சம்மந்தமில்லாத ஏதேனும் ஒன்று அல்லது இரண்டு எண்களைச் சேர்த்துக் கொண்டு பின்னர் அவற்றைத் தவிர்த்து விடலாம்.

***பயிற்சி* 1.4**

1) x என்பது y ஐச் சரியாக வகுத்தால் $x \mathrm{R} y$ என்று $\{2, 5, 8, 9\}$ இல் இருந்து $\{6, 8, 9, 12\}$ க்கு வரையறுக்கப்படும் R என்ற உறவின் உறவு அணியைக் காண்க.

2) $m > n$ எனில் $m \mathrm{R} n$ என்று $S=\{2, 4, 6, 9\}$ என்ற கணத்தின்மீது வரையறுக்கப்படும் R என்ற உறவின், உறவு அணியைக் காண்க.

3) $\mathrm{R} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} l & m \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ என்ற உறவு அணி குறிக்கும் உறவை ஒரு வரிசைச் சோடிகளின் கணமாக எழுதுக.

4) $\mathrm{R} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ என்ற உறவு அணி குறிக்கும் உறவின் நேர்மாறு உறவு R^{-1} இன் அணியைக் காண்க.

5) $x + y > 10$ எனில் $x\mathrm{R}y$ என்று R என்ற உறவு $X = \{3, 5, 9\}$ இல் இருந்து $Y= \{4, 3, 8\}$க்கு வரையறுக்கப்படுகிறது. $y < z$ எனில், $y\mathrm{S}z$ என்று S என்ற உறவு Y-இல் இருந்து $Z = \{1, 2, 5\}$-க்கு வரையறுக்கப்படுகிறது. R, S மற்றும் $\mathrm{R} \circ \mathrm{S}$-இன் உறவு அணிகளைக் காண்க.

6) $\{1, 2, 3, 4\}$ இன் மீதான $\mathrm{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ என்ற உறவின் அணியைக் காண்க. அதைப் பயன்படுத்தி அந்த உறவின் வகையைக் காண்க.

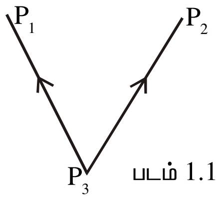
7) $\{1, 2, 3, 4\}$ இன் மீதான $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2)\}$ என்ற உறவின் அணியைக் கண்டுபிடித்து அதன் மூலம் அந்த உறவின் வகையைக் கண்டுபிடிக்க.

8) $\{1, 2, 3, 4\}$ இன் மீதான $R = \{(2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2)\}$ என்ற உறவின் அணியைக் காண்க. அதன் மூலம் அந்த உறவின் வகையைக் கண்டுபிடிக்க.

9) $\{1, 2, 3, 4\}$ இன் மீதான $R = \{(1, 2), (2, 3)\}$ என்ற உறவின் அணியைக் கண்டுபிடித்து அதன் மூலம் அந்த உறவின் வகையைத் தீர்மானிக்கவும்.

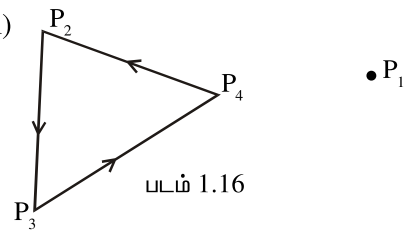
10) பின்வரும் திசையிட்ட தடம் ஒவ்வொன்றின் தட அணியைக் காண்க :

(i)



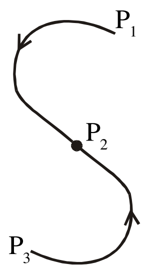
படம் 1.15

(ii)



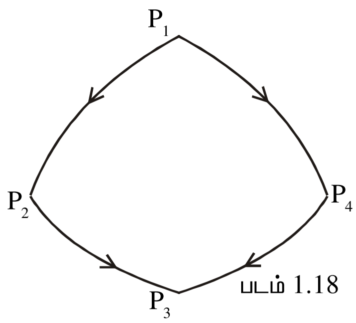
படம் 1.16

(iii)



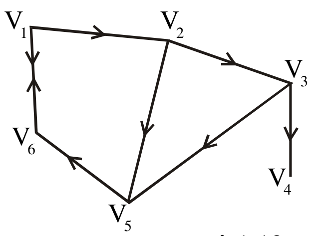
படம் 1.17

(iv)



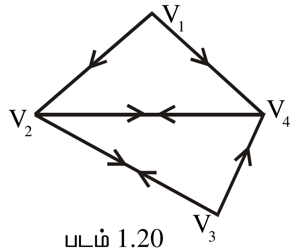
படம் 1.18

(v)



படம் 1.19

(vi)



படம் 1.20

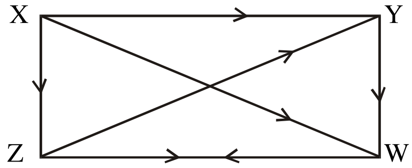
11) பின்வரும் தட அணிகளின் திசையிட்ட தடங்களை வரைக.

(i) $A = \begin{matrix} & P_1 & P_2 & P_3 \\ P_1 & 0 & 1 & 1 \\ P_2 & 1 & 0 & 1 \\ P_3 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ (ii) $\begin{matrix} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ V_1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ V_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ V_4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$

12) G என்ற திசையிட்ட தடத்தின் அணி $M = \begin{matrix} & A & B & C & D \\ A & 0 & 0 & 1 & 0 \\ B & 1 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & 1 & 0 & 1 \\ D & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$ எனில்

C யில் இருந்து A க்கு அதிகபட்சம் மூன்று நிலைகளில் அமையும் பாதைகளின் எண்ணிக்கையை M இன் அடுக்குகளைப் பயன்படுத்திக் காண்க. அந்தப் பாதைகளைக் குறிப்பிடுக.

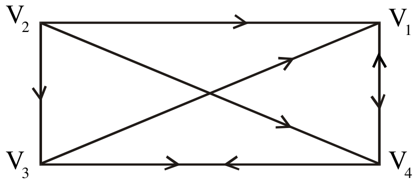
13) திசையிட்ட தடம் G கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 1.21

(i) G இன் தட அணியைக் காண்க.
(ii) தட அணியின் அடுக்குகளைப் பயன்படுத்தி G என்ற தடம் வலுவாக இணைக்கப்பபட்டுள்ளதா என்று கண்டுபிடிக்கவும்
(iii) G இன் பாதை அணியைக் காண்க.

14) G என்ற திசையிட்ட தடம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது :



படம் 1.22

(i) G இன் தட அணியைக் காண்க.
(ii) V_2 இல் இருந்து V_3 க்கு நீளம் 3 உள்ள பாதைகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(iii) V_2 இல் இருந்து V_4 க்கு நீளம் 4 உள்ள பாதைகளின் எண்ணிக்கையைக் கண்டு பிடிக்கவும். அப்பாதைகளைக் குறிப்பிடவும்.

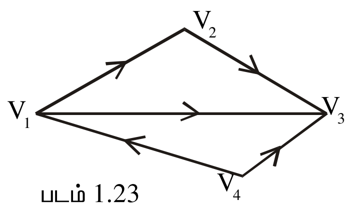
(iv) V_4 இல் இருந்து V_1 க்கு 3 அல்லது அதற்கு குறைவான நீளமுள்ள பாதைகளின் எண்ணிக்கையைக் கண்டுபிடிக்க. அப்பாதைகளைக் குறிப்பிடவும்.

(v) ஒன்று, இண்டு அல்லது மூன்று நிலைகளில் V_4 ஐ மற்ற முனைகளிலிருந்து எத்தனை வழிகளில் அணுகலாம்**?**

(vi) G என்பது வலுவாக இணைக்கப்பட்டுள்ளதா?

(vii) G இன் பாதை அணியைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

15) G என்ற திசையிட்ட தடம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது :



படம் 1.23

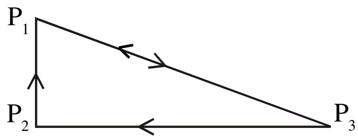
G இன் தட அணியைக் காண்க. அதன் அடுக்குகளைப் பயன்படுத்தி G என்பது வலுவாக இணைக்கப்பட்டுள்ளதா என்று கண்டுபிடி.

16) G என்ற திசையிட்ட தடத்தின் அணி

$$\begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

எனில், G என்பது வலுவாக இணைக்கப்பட்டுள்ளது என்று காட்டுக.

17) G என்ற திசையிட்ட தடம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. G இன் தட அணியைக் காண்க. மேலும் அதன் அடுக்குகளைப் பயன்படுத்தி G இன் பாதை அணியைக் காண்க.



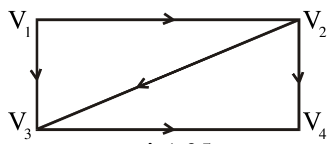
படம் 1.24

18) G என்ற திசையிட்ட தடத்தின் அணி

$$A = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

எனில் A இன் அடுக்குகளைப் பயன்படுத்தாமல் G இன் பாதை அணியைக் காண்க.

19) G என்ற திசையிட்ட தடம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது:



படம் 1.25

அதன் தட மற்றும் பாதை அணிகளைக் காண்க.

20)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

என்ற பதிலீட்டுத் திட்டமும் $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ என்ற அணியும் கொடுக்கப்படின்,

(i) CONSUMER என்பதைச் சங்கேத மொழியில் எழுதுக. மேலும்

(ii) 68, 48, 81, 60, 61, 42, 28, 27 என்ற சங்கேத மொழியின் செ–தியை வெளிக் கொணர்க.

1.5 உள்ளீடு - வெளியீடு பகுப்பா-வு (INPUT - OUTPUT ANALYSIS)

A_1 மற்றும் A_2 என்ற இரு தொழிற்சாலைகளைக் கொண்ட எளிமையான பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு ஒன்றைக் கருதுவோம். அந்த தொழிற்சாலைகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரே ஒரு விதமான பொருளை

மட்டுமே உற்பத்திச் செ–வதாகக் கொள்வோம். ஒவ்வொரு தொழிற்சாலையும் தனது செயல்பாட்டிற்கு, தன் உற்பத்தியில் ஒரு பகுதியையும், ஏனையவற்றிற்கு மற்ற தொழிற்சாலையின் உற்பத்தியையும் பயன்படுத்திக் கொள்கிறது. இவ்விதமாக அவை ஒன்றையொன்று சார்ந்து செயல்படுகின்றன. மேலும் உற்பத்தி முழுவதும் நுகரப்படுவதாகக் கொள்கிறோம். அதாவது ஒவ்வொரு தொழிற்சாலையின் மொத்த உற்பத்தியும் அதன் தேவையையும், மற்ற தொழிற்சாலையின் தேவையையும், வெளியாரின் தேவை அதாவது இறுதித் தேவையையும் சரியாக நிறைவு செ–யுமாறு அமைவதாகக் கொள்வோம்.

பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு மாறாதிருக்கும்போது, இரு தொழிற்சாலைகளின் தற்போதைய உற்பத்தி அளவுகளின் விவரங்களின் அடிப்படையில், வெளியாரின் தேவையின் மாற்றத்திற்கு ஏற்றபடி உற்பத்தி அளவுகள் எந்த அளவில் இருக்க வேண்டும் என்பதைக் காணுவதே நமது நோக்கமாகும்.

a_{ij} என்பது A_j ஆல் பயன்படுத்தப்படும் A_i இன் உற்பத்தியின் ரூபா– மதிப்பு என்க. இதில் $i, j = 1, 2$

x_1 மற்றும் x_2 என்பன முறையே A_1 மற்றும் A_2 இன் தற்போதைய உற்பத்திகளின் ரூபா– மதிப்புகள் என்க.

d_1 மற்றும் d_2 என்பன முறையே A_1 மற்றும் A_2 இன் உற்பத்திக்கான இறுதித் தேவைகளின் ரூபா– மதிப்புகள் என்க.

இவற்றின் வாயிலாக நாம் அமைக்கும் சமன்பாடுகள்

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} + a_{12} + d_1 = x_1 \\ a_{21} + a_{22} + d_2 = x_2 \end{array}\right\} \quad \text{----------}(1)$$

மேலும் $b_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{x_j}$, $i, j = 1, 2$ என்க.

அதாவது $b_{11} = \dfrac{a_{11}}{x_1}, b_{12} = \dfrac{a_{12}}{x_2}, b_{21} = \dfrac{a_{21}}{x_1},\ b_{22} = \dfrac{a_{22}}{x_2}$,

எனவே சமன்பாடுகள் (1) ஐக் கீழ்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$\begin{array}{l} b_{11}\, x_1 + b_{12}\, x_2 + d_1 = x_1 \\ b_{21}\, x_1 + b_{22}\, x_2 + d_2 = x_2 \end{array}$$

இவற்றைக் கீழ்கண்டவாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$(1-b_{11})\,x_1 - b_{12}\,x_2 = d_1$$
$$-b_{21}\,x_1 + (1-b_{22})\,x_2 = d_2$$

இவற்றின் அணி அமைப்பு,

$$\begin{pmatrix} 1-b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & 1-b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

அதாவது $(I - B)\,X = D$

இதில் $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ மற்றும் $D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$

$X = (I - B)^{-1}\,D$ ஆகும்.

அதில் அணி B க்கு **தொழில் நுட்ப அணி (Technology matrix)** என்று பெயர்.

இந்த பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு செயல்படும் வகையில் இருக்க **ஹாக்கின்-சைமன்** என்பவர்களது இரு நிபந்தனைகள் நிறைவு செ–யப்பட வேண்டும்.

B என்பது தொழில்நுட்ப அணி எனில் ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் நிபந்தனைகள் :

(i) $I - B$ அணியின் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் மிகை எண்களாக இருக்க வேண்டும். மேலும்

(ii) $|I - B|$ மிகை எண்ணாக இருக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 46

P, Q என்ற இரு தொழிற்சாலைகளைக் கொண்ட பொருளாதாரக் கட்டமைப்பின் விவரம் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளது. இங்குள்ள மதிப்புகள் இலட்ச ரூபா-களைக் குறிக்கும்

உற்பத்தியாளர்	உபயோகிப்போர்		இறுதித் தேவை	மொத்த உற்பத்தி
	P	Q		
P	16	12	12	40
Q	12	8	4	24

தொழில் நுட்ப அணியைக் கண்டுபிடித்து, இந்த பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு ஹாக்கின்-சைமன் நிபந்தனைகள்படி செயல்படும் வகையில் உளதா என ஆரா-க.

தீர்வு :

வழக்கமான குறியீட்டில்

$a_{11} = 16, \quad a_{12} = 12, \quad x_1 = 40$

$a_{21} = 12, \quad a_{22} = 8, \quad x_2 = 24$

$$\therefore \quad b_{11} = \frac{a_{11}}{x_1} = \frac{16}{40} = \frac{2}{5}, \; b_{12} = \frac{a_{12}}{x_2} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2},$$

$$b_{21} = \frac{a_{21}}{x_1} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}, \; b_{22} = \frac{a_{22}}{x_2} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}.$$

எனவே தொழில்நுட்ப அணி

$$B = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$I - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{10} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளான $\frac{3}{5}$ மற்றும் $\frac{2}{3}$ என்பன மிகை எண்களாக உள்ளன.

மேலும் $|I - B| = \begin{vmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{10} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \quad \therefore \; |I - B|$ என்பது மிகை எண்ணாக உள்ளன.

$\therefore$ ஹாக்கின்–சைமனின் இரு நிபந்தனைகளும் நிறைவு செ–யப்படுகின்றன. எனவே இந்த பொருளாதாரக் கட்டமைப்பு செயல்படும் வகையில் உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 47

ஒரு பொருளாதார அமைப்பில் P மற்றும் Q என்ற இரு தொழிற்சாலைகள் உள்ளன. அவற்றின் தேவை மற்றும் அளிப்பு நிலவரம் (ருபா- கோடிகளில்) கீழ்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

உற்பத்தியாளர்	உபயோகிப்போர்		இறுதித் தேவை	மொத்த உற்பத்தி
	P	**Q**		
P	**10**	**25**	**15**	**50**
Q	**20**	**30**	**10**	**60**

P இன் இறுதித்தேவையானது 35க்கும் Q-இன் இறுதித்தேவை 42க்கும் மாறும்போது உற்பத்திகளைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

வழக்கமான குறியீட்டில்,

$$a_{11} = 10, \quad a_{12} = 25 \qquad x_1 = 50$$
$$a_{21} = 20, \quad a_{22} = 30 \qquad x_2 = 60$$

எனவே

$$b_{11} = \frac{a_{11}}{x_1} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}, \; b_{12} = \frac{a_{12}}{x_2} = \frac{25}{60} = \frac{5}{12},$$
$$b_{21} = \frac{a_{21}}{x_1} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}, \; b_{22} = \frac{a_{22}}{x_2} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}.$$

$\therefore$ தொழில் நுட்ப அணி

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$I - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$|I - B| = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{5}{12} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{7}{30}$$

$$(I - B)^{-1} = \frac{1}{\frac{7}{30}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{30}{7} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{12} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 15 & \frac{25}{2} \\ 12 & 24 \end{pmatrix}$$

$$X = (I-B)^{-1} D$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 15 & \frac{25}{2} \\ 12 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 35 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & \frac{25}{2} \\ 12 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 204 \end{pmatrix}$$

P இன் உற்பத்தி ரூ.150 கோடி மதிப்புள்ளதாயும் Q இன் உற்பத்தி ரூ. 204 கோடி மதிப்புள்ளதாயும் இருக்க வேண்டும்.

***பயிற்சி* 1.5**

1) இரு தொழிற்சாலைகளையுடைய பொருளாதார அமைப்பின் தொழில் நுட்ப அணி $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ எனில் ஹாக்கின்–சைமன் நிபந்தனைகளின் படி அது செயல்படும் வகையில் உளதா என்று கண்டுபிடிக்க.

2) இரு தொழிற்சாலைகளின் பொருளாதார அமைப்பில் தொழில்நுட்ப அணி $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{9}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ எனில் அந்த அமைப்பு ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் நிபந்தனைகளின்படி அது செயல்படும் வகையில் உளதா என ஆ–வு செ–க.

3) இரு தொழிற்சாலைகளின் பொருளாதார கட்டமைப்பின் தொழில் நுட்ப அணி $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{7}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ ஆகும். இறுதித் தேவைகள் 34, 51 அலகுகளாக மாறும்போது உற்பத்தி அளவுகளைக் காண்க.

4) P மற்றும் Q என்ற இரு தொழிற்சாலைகளின் பொருளாதார அமைப்பின் விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது (மதிப்புகள் ரூபா–மில்லியன்களில்).

உற்பத்தியாளர்	உபயோகிப்போர்		இறுதித் தேவை	மொத்த உற்பத்தி
	P	Q		
P	14	6	8	28
Q	7	18	11	36

இறுதித் தேவைகள் P, 20 ஆகவும், Q 30 ஆகவும் மாறுகிறது எனில் தொழிற்சாலைகளின் வெளியீடுகளைக் காண்க.

5) P மற்றும் Q என்ற இரு தொழிற்சாலைகளின் உற்பத்திகளுக் கிடையேயான தொடர்பு பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. மதிப்புகள் இலட்ச ரூபா–களில் உள்ளன.

உற்பத்தியாளர்	உபயோகிப்போர்		இறுதித் தேவை	மொத்த உற்பத்தி
	P	Q		
P	15	10	10	35
Q	20	30	15	65

இறுதித் தேவைகள்

(i) P, 12 ஆகவும் Q, 18 ஆகவும் மாறும்போது

(ii) P, 8 ஆகவும் Q, 12 ஆகவும் மாறும்போது
தொழிற்சாலைகளின் உற்பத்திகளைக் காண்க.

6) P மற்றும் Q என்ற இரு தொழிற்சாலைகளின் பொருளாதார அமைப்பில் தேவை மற்றும் அளிப்பு விவரங்கள் கீழே மில்லியன் ரூபா–களில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

உற்பத்தியாளர்	உபயோகிப்போர்		இறுதித் தேவை	மொத்த உற்பத்தி
	P	Q		
P	16	20	4	40
Q	8	40	32	80

இறுதித் தேவைகள் P, 18 ஆகவும் Q, 44 ஆகவும் மாறும்போது அவற்றின் வெளியீடுகளைக் காண்க.

7) P மற்றும் Q என்ற இரு தொழிற்சாலைகளின் பொருளாதார அமைப்பின் விவரங்கள் (ரூபா– கோடிகளில்) கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

உற்பத்தியாளர்	உபயோகிப்போர்		இறுதித் தேவை	மொத்த உற்பத்தி
	P	Q		
P	50	75	75	200
Q	100	50	50	200

P-இன் இறுதித் தேவை 300 ஆகவும் Q-இன் இறுதி தேவை 600 ஆகவும் மாறும்போது அவற்றின் உற்பத்தி அளவுகளைக் காண்க.

8) P மற்றும் Q என்ற இரு தொழிற்சாலைகளின் உற்பத்திகளுக்கான தொடர்பு கோடி ரூபா–களில் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

உற்பத்தியாளர்	உபயோகிப்போர்		மொத்த உற்பத்தி
	P	Q	
P	300	800	2,400
Q	600	200	4,000

P-க்கான மற்றும் Q-க்கான இறுதித் தேவைகள் முறையே 5,000 மற்றும் 4,000 ஆக இருக்கும்போது அந்த தொழிற்சாலைகளின் உற்பத்திகளைக் காண்க.

1.6 மாறுதல் நிகழ்தகவு அணிகள் (TRANSITION PROBABILITY MATRICES)

இவ்வகை அணிகளின் உறுப்புகள் யாவும் ஒரு நிலையிலிருந்து மற்றொரு நிலைக்கு மாறுதலின் நிகழ்தகவுகளாக இருக்கும். பல மாற்றங்களின் நிகழ்தகவுகளை, துவக்க நிலைக்கு, அணிப் பெருக்கல் மூலம் செயல்படுத்தினால் அடுத்த நிலையினை ஊகிக்கலாம். பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் இதை விளக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 48

A மற்றும் B என்ற இரு விற்பனைப் பொருள்களின் சந்தை விற்பனை முறையே 60% மற்றும் 40 % ஆக உள்ளது. ஒவ்வொரு வாரமும் சில நுகர்வோரின் விருப்பங்கள் மாறுகின்றன. சென்றவாரம் A வாங்கியவர்களில் 70% பேர்கள் மீண்டும் A வாங்குகின்றனர். 30% பேர் B-க்கு மாறிவிடுகிறார்கள். சென்றவாரம் B வாங்கியவர்களில் 80% பேர் அதை மீண்டும் வாங்குகிறார்கள், 20% பேர் A-க்கு மாறிவிடுகிறார்கள். இரு வாரங்களுக்குப் பிறகு அவர்களின் சந்தைப் பங்கீடுகளைக் காண்க. இந்த போக்கு தொடருமானால் எப்போது சமநிலை எட்டப்படும்?

தீர்வு :

மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி $T = \begin{matrix} & A & B \\ A & 0.7 & 0.3 \\ B & 0.2 & 0.8 \end{matrix}$

ஒரு வாரத்திற்குப் பிறகு பங்கீடுகள்

$$\begin{matrix} A & B \end{matrix} \; (0.6 \;\; 0.4) \begin{matrix} & A & B \\ A & 0.7 & 0.3 \\ B & 0.2 & 0.8 \end{matrix} = \begin{matrix} A & B \end{matrix} \; (0.5 \;\; 0.5)$$

A = 50%, B = 50%

இரு வாரங்களுக்குப் பிறகு பங்கீடுகள்

$$\begin{matrix} A & B \end{matrix} \; (0.5 \;\; 0.5) \begin{matrix} & A & B \\ A & 0.7 & 0.3 \\ B & 0.2 & 0.8 \end{matrix} = \begin{matrix} A & B \end{matrix} \; (0.45 \;\; 0.55)$$

A = 45%, B = 55%

சம நிலை

சமநிலையில் $(A \;\; B)\, T = (A \;\; B)$ இதில் $A + B = 1$

$$\Rightarrow (A \;\; B) \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = (A \;\; B)$$

$$\Rightarrow 0.7\,A + 0.2\,B = A$$

$$\Rightarrow 0.7\,A + 0.2\,(1-A) = A \;\Rightarrow\; A = 0.4$$

$\therefore$ A இன் பங்கீடு 40% ஆகவும் B இன் பங்கீடு 60% ஆகவும் இருக்கும்போது சமநிலை எட்டப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 49

ஒரு நகரில் ஒரு புதிய போக்குவரத்து வசதி தற்போது செயல்பாட்டிற்கு வந்துள்ளது. அதனை இந்த ஆண்டு பயன்படுத்துபவர்களில் 10% பேர் அடுத்த ஆண்டு பயன்படுத்தாமல் தங்களின் சொந்த வாகனங்களுக்கு மாறிவிடுவர். மீதி 90% பேர் தொடர்ந்து அப்புதிய போக்குவரத்து வசதியைப் பயன்படுத்துவர். இந்த ஆண்டு தங்களின் சொந்த வாகனங்களைப் பயன்படுத்து பவர்களில் 80% பேர் அடுத்த ஆண்டும் தொடர்ந்து அவற்றையே பயன்படுத்துவர். மீதி 20% பேர் புதிய போக்குவரத்து வசதிக்கு மாறிவிடுவர். நகரத்தின்

ஜனத்தொகை மாறாமலிருக்கிறது என்றும் பயணிகளில் இந்த ஆண்டு 50% பேர் புதிய போக்குவரத்து வசதியையும் 50% பேர் தங்களின் சொந்த வாகனங்களையும் பயன்படுத்துகின்றனர் என்றும் கொண்டால்

(i) ஓராண்டிற்கு பிறகு எத்தனை சதவீதம் பயணிகள் புதிய போக்குவரத்து வசதியைப் பயன்படுத்துவர்?

(ii) காலப்போக்கில் எத்தனை சதவீதம் பேர் புதிய போக்குவரத்து வசதியைப் பயன்படுத்துவர்?

தீர்வு :

மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி

$$T = \begin{array}{c} \\ S \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} S & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

ஓராண்டிற்கு பிறகு

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} S & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ S \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} S & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.55 & 0.45 \end{pmatrix} \end{array}$$

$S = 55\%$, $\qquad C = 45\%$

காலப்போக்கில் சமநிலை எட்டப்படும்

$(S \;\; C)\, T = (S \;\; C)$ $\qquad$ இதில் $S + C = 1$

$$\Rightarrow (S \;\; C) \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = (S \;\; C)$$

$$\Rightarrow 0.9S + 0.2C = S$$

$$\Rightarrow 0.9S + 0.2(1\text{-}S) = S \Rightarrow S = 0.67$$

$\therefore$ காலப்போக்கில் 67% பயணிகள் புதிய போக்குவரத்து வசதியைப் பயன்படுத்துவர்.

பயிற்சி 1.6

1) தற்போது P மற்றும் Q என்ற இரு விற்பனைப் பொருள்களின் சந்தை விற்பனை முறையே 70% மற்றும் 30% ஆக உள்ளது. ஒவ்வொரு வாரமும் சில நுகர்வோரின் விருப்பங்கள் மாறுகின்றன. சென்ற வாரம்

P-வாங்கியவர்களில் 80% பேர் மீண்டும் அதை வாங்குகின்றனர், 20% பேர் Q-க்கு மாறிவிடுகின்றனர். சென்ற வாரம் Q-வாங்கியவர்களில் 40% பேர் மீண்டும் அதை வாங்குகின்றனர், 60% பேர் P-க்கு மாறிவிடுகின்றனர். இரண்டு வாரங்களுக்குப் பிறகு அவர்களின் சந்தைப் பங்கீடுகளைக் காண்க. இந்த போக்கு தொடருமானால் எப்போது சமநிலை எட்டப்படும்**?**

2) ஒரு வாரப் பத்திரிக்கைக்குச் சந்தா கட்டுமாறு கேட்டுக் கொள்ளப்படும் கடிதம் அந்த பத்திரிக்கை அலுவலகத்திலிருந்து ஏராளமானவர்களுக்கு அனுப்பப்படுகிறது. கடிதம் பெற்றவர்களில், சந்தாதாரர்களாக இருந்து மீண்டும் சந்தா கட்டுபவர் 60% ஆகும். சந்தாதாரர்களாக இல்லாமலிருந்து புதியதாக சந்தா கட்டுபவர்கள் 25% ஆகும். இதேபோல் முன்னர் கடிதம் அனுப்பப்பட்ட போது கடிதம் பெற்றவர்களில் 40% பேர் சந்தாதாரர்களாகச் சேர்ந்தனர் எனத் தெரிகிறது. தற்போதைய கடிதத்தைப் பெறுபவர்களில் எத்தனை சதவீதம் பேர் சந்தாதாரர்களாவர் என எதிர்பார்க்கலாம்?

3) ஒரு நகரில் A, B என்ற இரு செ–தித்தாள்கள் வெளிவருகின்றன. அவைகளின் தற்போதைய சந்தைப் பங்கீடு A, 15% மற்றும் B, 85% ஆகும். சென்ற ஆண்டு A வாங்கியவர்களில் 65% பேர் மீண்டும் அதை இந்தாண்டும் வாங்குகிறார்கள், 35% பேர் Bக்கு மாறிவிடுகின்றனர். சென்ற ஆண்டு B வாங்கியவர்களில் 55% பேர் இந்தாண்டும் மீண்டும் அதை வாங்குகிறார்கள், 45% பேர் A-க்கு மாறிவிடுகிறார்கள். இரண்டு ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு அவற்றின் சந்தைப் பங்கீடுகளைக் காண்க.

பயிற்சி 1.7

ஏற்புடைய விடையைத் தெரிவு செ-க

1) $|a_{ij}|$ என்ற அணிக்கோவையில் a_{23} இன் சிற்றணி a_{23} இன் இணைக் காரணிக்குச் சமம் எனில் சிற்றணி a_{23} இன் மதிப்பு

(a) 1 (b) 2 (c) 0 (d) 3

2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ இன் சேர்ப்பு அணி

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ இன் சேர்ப்பு அணி

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

4) $AB = BA = |A| I$ எனில் அணி B என்பது

(a) A- இன் நேர்மாறு (b) A இன் நிரைநிரல் மாற்று

(c) A இன் சேர்ப்பு (d) 2A

5) A என்பது 3 வரிசை உள்ள சதுர அணி எனில் |AdjA| இன் மதிப்பு

(a) $|A|^2$ (b) $|A|$ (c) $|A|^3$ (d) $|A|^4$

6) $|A| = 0$ எனில் |AdjA| இன் மதிப்பு

(a) 0 (b) 1 (c) −1 (d) ± 1

7) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ இன் நேர்மாறு

(a) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

8) $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ -0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$ எனில் $A^{-1} =$

(a) $\begin{pmatrix} -0.8 & 0.6 \\ -0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ -0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$

9) k இன் எம்மதிப்பிற்கு $A = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ என்ற அணிக்கு நேர்மாறு இருக்காது?

(a) $\frac{3}{10}$ (b) $\frac{10}{3}$ (c) 3 (d) 10

10) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ எனில் $A^{-1}A =$

(a) 0 (b) A (c) I (d) A^2.

11) ஒவ்வொரு உறுப்பும் 1 ஆக உள்ள ஒரு $n \times n$ அணியின் தரம்
(a) 1 (b) 2 (c) n (d) n^2

12) ஒவ்வொரு உறுப்பும் 2 ஆக உள்ள ஒரு $n \times n$ அணியின் தரம்
(a) 1 (b) 2 (c) n (d) n^2

13) பூச்சிய அணியின் தரம்
(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) ∞

14) ஒரு $n \times n$ வரிசையுள்ள பூச்சியக் கோவை அணியாக இல்லாத அணியின் தரம்
(a) n (b) n^2 (c) 0 (d) 1

15) நேரியல் சமபடித்தான சமன்பாடுகளுக்கு குறைந்த பட்சம் இருப்பது
(a) ஒரு தீர்வு (b) இரு தீர்வுகள்
(c) மூன்று தீர்வுகள் (d) நான்கு தீர்வுகள்

16) AX = B என்ற சமன்பாடுகளை கிராமரின் முறையில் தீர்க்க நிறைவு செ–யப்பட வேண்டிய நிபந்தனை
(a) $|A| = 0$ (b) $|A| \neq 0$ (c) A = B (d) $A \neq B$

17) $\begin{matrix} & x & y \\ a & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \end{matrix}$ என்ற உறவின் நேர்மாறு உறவு

(a) $\begin{matrix} & a & b \\ x & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 \end{matrix}$ (b) $\begin{matrix} & x & y \\ a & 0 & -1 \\ b & -1 & 0 \end{matrix}$ (c) $\begin{matrix} & a & b \\ x & 0 & 0 \\ y & 1 & 1 \end{matrix}$ (d) $\begin{matrix} & x & y \\ a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{matrix}$

18) $R = \begin{matrix} & a & b \\ a & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \end{matrix}$ என்ற உறவு
(a) சமனி உறவு (b) சமச்சீர் உறவு (c) தொடர் உறவு (d) சமான உறவு

19) உள்ளீடு–வெளியீடு பகுப்பா–வின் செயல்படும் வா–ப்பிற்கான ஹாக்கின்ஸ்–சைமன் நிபந்தனைகளின் எண்ணிக்கை
(a) 1 (b) 3 (c) 4 (d) 2

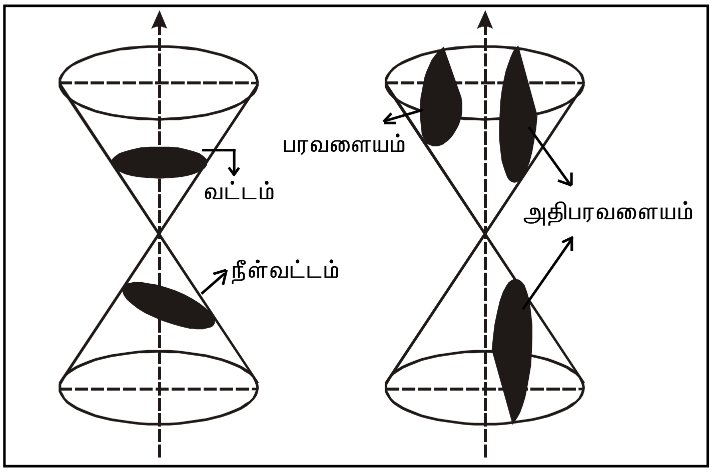
20) $T = \begin{matrix} & A & B \\ A & 0.7 & 0.3 \\ B & x & 0.8 \end{matrix}$ என்பது மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி எனில் $x =$
(a) 0.3 (b) 0.2 (c) 0.3 (d) 0.7

பகுமுறை வடிவ கணிதம் 2

2.1 கூம்பு வெட்டிகள் (CONICS)

கூம்பை தளத்தால் வெட்டுவதால் கிடைக்கும் வளை வரைகள்

பரவளையம், நீள்வட்டம் மற்றும் அதிபரவளையம் என்பன கூம்பு வெட்டிகள் என்று அழைக்கப்படும் வளைவரைத் தொகுதிகளின் உறுப்புகளாகும் ஒரு கூம்பினை ஒரு தளத்தால் வெட்டுவதால் மேற்கூறிய வளைவரைகளைப் பெறலாம். எனவேதான் அவை கூம்புவெட்டிகள் என்றழைக்கப்படுகின்றன.



படம் 2.1

ஒரு தளத்திலுள்ள நகரும் புள்ளி ஒன்றிற்கும் அதே தளத்திலுள்ள நிலைப்புள்ளிக்கும் உள்ள தொலைவு மற்றும் அந்த நகரும் புள்ளிக்கும் அதே தளத்திலுள்ள ஒரு நிலைக்கோட்டிற்கும் உள்ள தொலைவுகளின் விகிதம் மாறிலி எனில், அந்த நகரும் புள்ளியின் நியமப்பாதை **கூம்பு வெட்டியாகும்.**

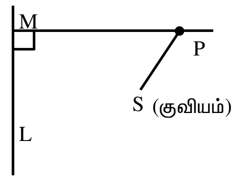
குவியம், இயக்குவரை, மையத்தொலைத் தகவு விகிதம்

மேற்கண்ட வரையரையில், நிலையான புள்ளியைக் **குவியம்,**

நிலையான கோட்டை **இயக்குவரை**, மாறிலியான விகிதத்தை மையத்தொலைத் தகவு என்கிறோம்.

மையத்தொலைத் தகவு வழக்கமாக 'e' என்ற எழுத்தால் குறிக்கப்படும்.

படம் 2.2 இல், S என்பது குவியம், LM என்பது இயக்குவரை, மற்றும் $\frac{SP}{PM} = e$



படம் 2.2

ஒரு கூம்பு வெட்டியில்

$e = 1$ எனில் அது பரவளையமாகும்

$e < 1$ எனில் அது நீள்வட்டமாகும்

மற்றும் $e > 1$ எனில்

அது அதிபரவளையமாகும்.

2.1.1 கூம்பு வெட்டியின் பொதுச் சமன்பாடு

கூம்பு வெட்டிக்கு குவியம் $S(x_1, y_1)$, இயக்குவரையின் சமன்பாடு $Ax + By + C = 0$, மையத் தொலைத் தகவு 'e' என்க.

$P(x, y)$, கூம்பு வெட்டியின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

$$SP = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}$$

$Ax + By + C = 0$ இலிருந்து $P(x, y)$ இன் குத்துத் தொலைவு

$$PM = \pm \frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\frac{SP}{PM} = e \Rightarrow \frac{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}}{\pm \frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}} = e$$

அல்லது $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = e^2\left[\frac{(Ax+By+C)^2}{(A^2+B^2)}\right]$

இதை சுருக்கினால் $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற வடிவில், x,y இல் உள்ள இருபடிச் சமன்பாடு கிடைக்கும். இதுவே கூம்பு வெட்டியின் பொதுச் சமன்பாடு ஆகும்.

குறிப்பு

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற சமன்பாடு

(i) $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$ எனில், இரட்டை நேர்க்கோடுகளைக் குறிக்கும்.

(ii) $a = b,\ h = 0$ எனில், ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும். மேற்கூறிய இரண்டு நிபந்தனைகளும் நிறைவு செ–யப்படாவிடில், $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ஆனது

(iii) $h^2 - ab = 0$ எனில், ஒரு பரவளையத்தைக் குறிக்கும்.

(iv) $h^2 - ab < 0$ எனில், ஒரு நீள்வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

(v) $h^2 - ab > 0$ எனில், ஒரு அதிபரவளையத்தைக் குறிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1

$4x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 32y + 16 = 0$ என்ற சமன்பாடு ஒரு கூம்பு வெட்டியைக் குறிக்கிறது. அதன் வகையைக் குறிப்பிடுக.

தீர்வு :

$4x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 32y + 16 = 0$ என்ற சமன்பாட்டை,

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிடும் பொழுது, நாம் பெறுவது, $a = 4, 2h = 4, b = 1$

$\therefore \quad h^2 - ab = (2)^2 - 4(1) = 4 - 4 = 0$

எனவே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூம்பு வெட்டி ஒரு பரவளையமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2

$16x^2 + 25y^2 - 118x - 150y - 534 = 0$ என்ற சமன்பாடு குறிக்கும் கூம்பு வெட்டியின் வகையைக் குறிப்பிடுக.

தீர்வு :

இங்கு, $a = 16, 2h = 0, b = 25$

$\therefore h^2 - ab = 0 - 16 \times 25 = -400 < 0$

எனவே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூம்புவெட்டி ஒரு நீள்வட்டமாகும்

பயிற்சி 2.1

பின் வரும் சமன்பாடுகள் குறிக்கும் கூம்புவெட்டிகளின் வகையைக் காண்க.

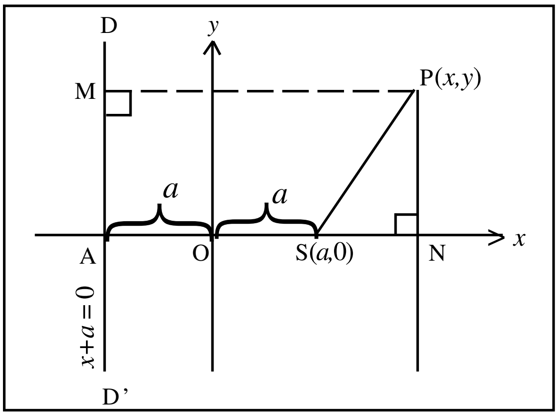
1) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 26x - 38y + 49 = 0$

2) $7x^2 + 12xy - 2y^2 + 22x + 16y - 7 = 0$

3) $7x^2 + 2xy + 7y^2 - 60x - 4y + 44 = 0$

2.2 பரவளையம்

2.2.1 பரவளையத்தின் திட்டவடிவம்



படம் 2.5

S ஐ குவியம், DD′ ஐ இயக்குவரை என்க. S இல் இருந்து DD′ க்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடு,DD′ ஐ A இல் சந்திக்கட்டும். SA = $2a$ என்க. AS ஐ, x அச்சாகவும், AS இன் மையப்புள்ளி O வழியாக AS க்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடு OY ஐ y அச்சாகவும் தெரிவு செ–க.

எனவே S $(a,0)$ எனவும், இயக்குவரை DD′ இன் சமன்பாடு $x + a = 0$ எனவும் பெறுகிறோம்.

P(x,y) பரவளையத்தின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. PM ஐ DD′ க்கும் PN ஐ Ox க்கும் செங்குத்தாக வரைக.

$$PM = NA = NO + OA = x + a.$$

$$SP^2 = (x - a)^2 + y^2$$

$$\frac{SP}{PM} = e$$ [P பரவளையத்தின் மீது ஒரு புள்ளி]

(அ–து), $SP^2 = e^2 (PM)^2$

(அ–து), $(x - a)^2 + y^2 = (x + a)^2 \quad (e = 1)$

(அ−து), $y^2 = 4ax$

இதுவே பரவளையத்தின் திட்ட வடிவமாகும்.

குறிப்பு

(i) பரவளையத்தின் குவியம் வழியாக மற்றும் இயக்குவரைக்கு செங்குத்தாக அமைந்துள்ள கோடு, பரவளையத்தின் **அச்சு** எனப்படும். பரவளையமும், அதன் அச்சும் சந்திக்கும் புள்ளி பரவளையத்தின் **முனை** எனப்படும்.

(ii) பரவளையத்தின் அச்சுக்கு செங்குத்தாக, குவியத்தின் வழியாக செல்லும் நாண் பரவளையத்தின் **செவ்வகலம்** எனப்படும்.

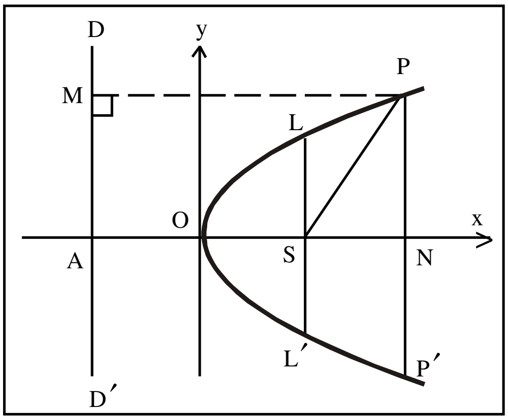
2.2.2 $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தை வரைதல்.

1) (a) $y = 0$ எனில், x பெறும் மதிப்பு பூச்சியம் மட்டுமே. $\therefore$ பரவளையம் x அச்சை $(0,0)$ இல் மட்டுமே வெட்டுகிறது.

(b) $x < 0$ எனில், y கற்பனையானது. எனவே வளைவரை x இன் குறை மதிப்புகளுக்கு அமையாது.

(c) y க்கு $-y$ ஐ பிரதியிட பரவளையத்தின் சமன்பாடு மாறாது. எனவே பரவளையம் x அச்சுக்கு சமச்சீரானது.

(d) x அதிகரிக்க, $|y|$ ம் அதிகரிக்கிறது. $x \to \infty$ எனில் $y \to \pm\infty$. எனவே வளைவரை விரிந்து மற்றும் படம் 2.4 இல் உள்ள வடிவத்தைப் பெறுகிறது.



படம் 2.4

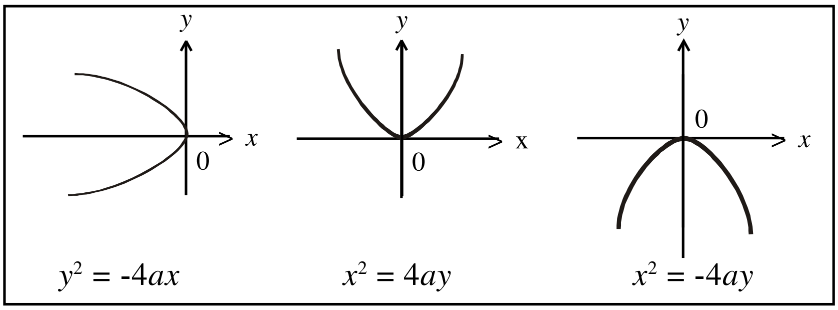
2) **இயக்குவரை :** இயக்குவரை y அச்சுக்கு இணையான ஒரு கோடு. இயக்குவரையின் சமன்பாடு $x + a = 0$ ஆகும்.

3) **அச்சு :** x அச்சு பரவளையத்தின் அச்சாகவும், y அச்சு பரவளையத்தின் முனையில் வரையப்படும் தொடு கோடாகவும் உள்ளன.

4) **செவ்வகலம் :** S இன் வழியாக, LSL' ஐ AS க்கு செங்குத்தாக வரைக.
$x = a$ எனில், $y^2 = 4a^2$ அல்லது $y = \pm 2a$ $\therefore$ $SL = SL' = 2a$.
எனவே $LL' = 4a$. LL' பரவளையத்தின் செவ்வகலம் ஆகும்.
SL (அல்லது SL′) அரை செவ்வகலம் ஆகும். $OS = \frac{1}{4}(LL') = a$

குறிப்பு

$y^2 = -4ax$ என்ற பரவளையம், x அச்சின் குறைப் பகுதியில் அமைகிறது. y அச்சினை சமச்சீராகக் கொண்ட பரவளையம் $x^2 = 4ay$ ஆனது y அச்சின் மிகைப் பகுதியில் அமைகிறது. $x^2 = -4ay$ எனும் பரவளையம் y அச்சின் குறைப் பகுதியில் அமைகிறது.



படம் 2.5

சமன்பாடு	$y^2 = 4ax$	$y^2 = -4ax$	$x^2 = 4ay$	$x^2 = -4ay$
குவியம்	$(a,0)$	$(-a, 0)$	$(0,a)$	$(0,-a)$
முனை	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
இயக்குவரை	$x = -a$	$x = a$	$y = -a$	$y = a$
செவ்வகலம்	4a	4a	4a	4a
அச்சு	$y = 0$	$y = 0$	$x = 0$	$x = 0$

எடுத்துக்காட்டு 3

(2, 1) என்ற குவியமும், $2x + y + 1 = 0$ என்ற இயக்குவரையும் கொண்ட பரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு :

P (x, y) என்பது பரவளையத்தின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி..

PM ஐ இயக்குவரைக்கு செங்குத்தாக வரைக,

$\frac{SP}{PM} = 1$ (இங்கு S குவியமாகும்) $\therefore \quad SP^2 = PM^2$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = \left(\frac{2x+y+1}{\sqrt{2^2+1^2}}\right)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = \frac{(2x+y+1)^2}{5}$$

$$5x^2 + 5y^2 - 20x - 10y + 25 = 4x^2 + y^2 + 1 + 4xy + 2y + 4x$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 24x - 12y + 24 = 0.$$

இதுவே தேவையான சமன்பாடு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4

$y^2 - 8x - 2y + 17 = 0$ என்ற பரவளையத்தின் குவியம், செவ்வகலம், முனை, இயக்குவரை ஆகியனவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

$y^2 - 8x - 2y + 17 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 2y = 8x - 17$

$\Rightarrow \quad y^2 - 2y + 1 = 8x - 16 \quad \Rightarrow \quad (y-1)^2 = 8(x-2)$

ஆதியை $(2,1)$ க்கு மாற்றி, $x - 2 = X$, $y - 1 = Y$ எனில் பரவளையத்தின் சமன்பாடு $Y^2 = 8X$ ஆகும்.

$\therefore$ புதிய ஆதி (2, 1) என்பது முனை ஆகும். செவ்வலகம் = 8

X, Y அச்சுகளைப் பொறுத்து, (2, 0) குவியம், இயக்குவரையின் சமன்பாடு $X + 2 = 0$ ஆகும்.

எனவே x, y அச்சுகளைப் பொறுத்து, (4, 1) குவியம் ஆகும். $x - 2 + 2 = 0$ அல்லது $x = 0$ இயக்குவரை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5

$4y^2 + 12x - 20y + 67 = 0$ என்ற பரவளையத்தின் முனை, குவியம், அச்சு, இயக்குவரை, அரைச் செவ்வகலம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

$$4y^2 + 12x - 20y + 67 = 0$$

அல்லது $4y^2 - 20y = -12x - 67$

$$4(y^2 - 5y) = -12x - 67$$

$$4\left\{y^2 - 5y + \frac{25}{4} - \frac{25}{4}\right\} = -12x - 67$$

$$4\left[\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right] = -12x - 67$$

$$4\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 25 - 12x - 67 = -12\left(x + \frac{7}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 3\left(-x - \frac{7}{2}\right)$$

இதனை $Y^2 = 4aX$ என்ற திட்டவடிவத்திற்கு கொணர,

$X = -x - \frac{7}{2}$ மற்றும் $Y = y - \frac{5}{2}$ என்க.

$Y^2 = 3X$. இங்கு $4a = 3$ $\therefore a = \frac{3}{4}$

இப்போது விடைகளை பட்டியலிடலாம்.

	(X, Y) ஐப் பொறுத்தது	**(x, y) ஐப் பொறுத்தது** $x = -X - \frac{7}{2}$, $y = Y + \frac{5}{2}$
முனை	$(0,0)$	$\left(0 - \frac{7}{2}, 0 + \frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$
அச்சு	$Y = 0$ (X -axis)	$y - \frac{5}{2} = 0$ or $y = \frac{5}{2}$
குவியம்	$(a, 0) = (\frac{3}{4}, 0)$	$\left(-\frac{3}{4} - \frac{7}{2}, 0 + \frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{17}{4}, \frac{5}{2}\right)$
இயக்குவரை	$X = -a \Rightarrow X = \frac{-3}{4}$	$-x - \frac{7}{2} = \frac{-3}{4}$ அல்லது $x = -\frac{11}{4}$
அரைச்செவ்வகலம்	$2a = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$

குறிப்பு

இதே கணக்கை $X = x + \frac{7}{2}$, $Y = y - \frac{5}{2}$ என்று மாற்றம் செ–து, $Y^2 = -3X$ எனப் பெற்று, அதை $y^2 = -4ax$ என்ற சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிட்டும் தீர்வு காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 6

ஓர் உலோகத்தை தயாரிக்கும் நிறுவனத்தின் மாதாந்திர உற்பத்தி x கிலோகிராம்களின் சராசரி விலை y-ஐ ரூ.$(\frac{1}{10}x^2 - 3x + 50)$ என்பது கொடுக்கிறது. சராசரி விலையின் வளைவரை ஒரு பரவளையம் என காட்டுக. வளைவரையின் முனையில் சராசரி விலை மற்றும் உற்பத்தியைக் காண்க.

தீர்வு :

சராசரி விலையின் வளைவரை

$$y = \frac{1}{10}x^2 - 3x + 50 \quad \Rightarrow \quad 10y = x^2 - 30x + 500$$

$$\Rightarrow 10y = (x-15)^2 + 275 \quad \Rightarrow (x-15)^2 = 10y - 275$$

$$\Rightarrow (x-15)^2 = 10(y - 27.5) \quad \Rightarrow \quad X^2 = 10Y$$ இதில்

$$X = x-15,\ Y = y - 27.5$$

$$4a = 10 \quad \Rightarrow \quad a = 2.5$$

எனவே சராசரி விலையின் வளைவரை ஒரு பரவளையாகும்.

அதன் முனை . $(X = 0, Y = 0)$ (அ–து) $(x = 15, y = 27.5)$

பரவளையத்தின் முனைப்புள்ளியில், உற்பத்தி 15 கி.கிராம்கள், சராசரி விலை ரூ.27.50 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7

ஒரு விற்பனை பொருளின் விலைக்கும் அளிப்புக்கும் உள்ள தொடர்பு $x = 5\sqrt{2p-10}$ ஆகும். அளிப்பின் வளைவரை ஒரு பரவளையம் என காட்டுக. அதன் முனையைக் காண்க. எந்த விலைக்குக் கீழ் அளிப்பு பூச்சியம் ஆகும்?

தீர்வு :

விலைக்கும் அளிப்பிற்கும் உள்ள தொடர்பு,

$x^2 = 25(2p - 10) \Rightarrow x^2 = 50\ (p - 5)$

$\Rightarrow \quad X^2 = 4aP$ இதில் $X = x$

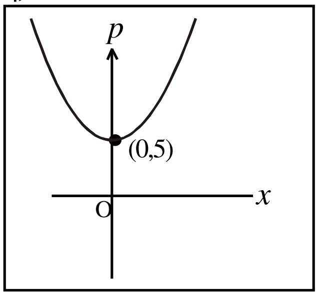
மற்றும் $\quad P = p - 5$

$\Rightarrow$ அளிப்பு வளைவரை ஒரு பரவளையம்

இதன் முனை $(X = 0, P = 0)$

$\Rightarrow \quad (x = 0, p = 5) \Rightarrow (0, 5)$

எனவே $p = 5$ க்கு கீழ், அளிப்பு பூச்சியமாகும்.



படம் 2.6

எடுத்துக்காட்டு 8

ஓர் இருப்புப் பாதை அமைந்த பாலத்தின் மேல் வளைவு (Girder), பரவளையத்தின் வடிவில் உள்ளது. பாலத்திலிருந்து 15 மீட்டர் உயரத்திலுள்ள மேல் வளைவின் உச்சியானது பரவளையத்தின் முனையாகும். மேல்வளைவின் தொடக்க மற்றும் முடிவுப் புள்ளிகளை இணைக்கும் 150மீ. நீளமுள்ள நேர்கோட்டின் (span) மையப்புள்ளியிலிருந்து 30 மீட்டர் தொலைவில் மேல்வளைவின் உயரத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

பரவளையத்தின் சமன்பாடு $y^2 = 4ax$ என்க.

பரவளையத்தின் முனையை ஆதியாகக் கருதுக.

பரவளையம், $(15,75)$ வழியாகச் செல்கின்றது

$\Rightarrow \quad (75)^2 = 4a(15)$

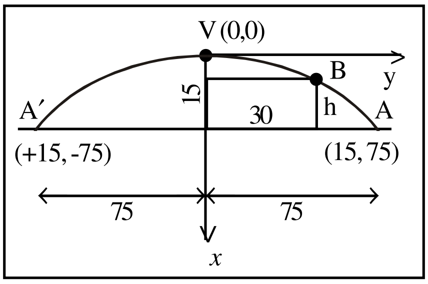
$$4a = \frac{(75)^2}{15} = 375$$

எனவே பரவளையத்தின்

சமன்பாடு $y^2 = 375x$

இப்பொழுது B $(x, 30)$,

பரவளையத்தின் மீது அமைந்துள்ளது.



படம் 2.7

$\Rightarrow \qquad 375x \quad = 30^2$

$\therefore \qquad x = \qquad = \dfrac{12}{5} \;= 2.4$ மீ.

தேவையான உயரம் $= 12.6$ மீ.

எடுத்துக்காட்டு 9

'x' மாதங்களில் சேரும் இலாபம் ரூ.'y' -ஐ (இலட்சங்களில்) $y = -4x^2 + 28x - 40$ என்ற சமன்பாடு கொடுக்கிறது. எப்பொழுது அந்த வியாபார முயற்சியை நிறுத்தி விடுவது உகந்தது எனக் கண்டுபிடி.

தீர்வு :

$$4x^2 - 28x \;= -40 - y \quad \Rightarrow \quad 4(x^2 - 7x) = -40 - y$$

$$4(x^2 - 7x + \frac{49}{4}) = -40 - y + 49$$

$$(x - \frac{7}{2})^2 \;= \frac{1}{4}(9 - y) \quad \Rightarrow \quad (x - \frac{7}{2})^2 \;= -\frac{1}{4}(y - 9)$$

தேவையான காலம் $= \dfrac{7}{2} \;= 3\dfrac{1}{2}$ மாதங்கள் (எப்படி?)

பயிற்சி $\frac{900}{375}$ 2.2

1. பின் வரும் குவியங்களையும், இயக்குவரைகளையும் கொண்டு அமையும் பரவளையங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
   (a) $(1, 2)\,;\, x + y - 2 = 0$ (b) $(1, -1)\,;\, x - y = 0$
   (c) $(0, 0)\,;\, x - 2y + 2 = 0$ (d) $(3,4)\,;\, x - y + 5 = 0$

2) பின் வரும் சமன்பாடுகளைக் கொண்ட பரவளையங்களின் முனை, அச்சு, குவியம், இயக்குவரை ஆகியனவற்றைக் காண்க.
   (a) $x^2 = 100y$ (b) $y^2 = 20x$
   (c) $y^2 = -28x$ (d) $x^2 = -60y$

3) பின் வரும் பரவளையங்களின், குவியம், செவ்வகலம், முனை, இயக்குவரை ஆகியனவற்றைக் காண்க.
   (a) $y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$ (b) $y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$
   (c) $y^2 - 8x - 9 = 0$ (d) $x^2 - 3y + 3 = 0$

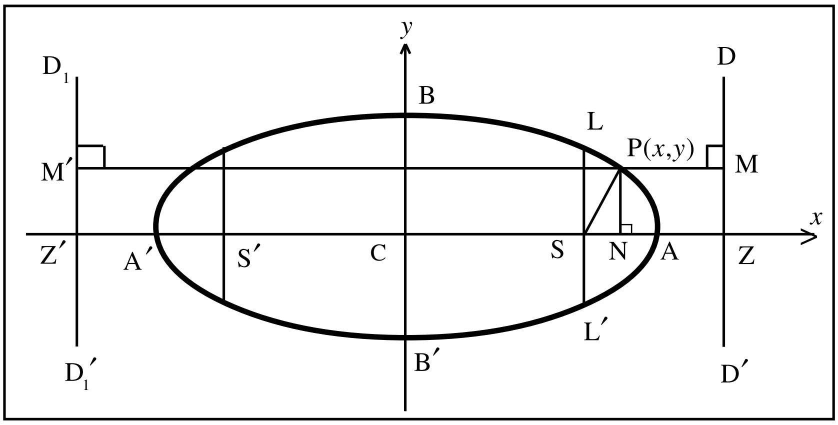
4) ஓர் உலோகத்தை தயாரிக்கும் நிறுவனத்தன் மாதாந்திர உற்பத்தி x டன்களின் சராசரி விலை y ஐ ரூ. $\frac{1}{10}x^2 - 3x + 62.5$ என்பது கொடுக்கிறது. சராசரி விலையின் வளைவரை, ஒரு பரவளையம் என காட்டுக. வளைவரையின் முனையில் உற்பத்தி மற்றும் சராசரி விலையைக் காண்க.

குறிப்பு

$y_1^2 - 4ax_1$ என்பது பூச்சியத்திற்கு அதிகமாக, சமமாக, குறைவாக இருக்கும்போது (x_1, y_1) என்ற புள்ளி, பரவளையத்திற்கு முறையே வெளியே, மேல், உள்ளே அமையும்.

2.3 நீள்வட்டம்

2.3.1 நீள்வட்டத்தின் திட்ட வடிவம்



படம் 2.8

S ஐ குவியம் மற்றும் DD' ஐ இயக்குவரை என்க.

SZ ஐ DD′ க்கு செங்குத்தாக வரைக. A, A′ முறையே SZ ஐ உட்புறமாகவும், வெளிப்புறமாகவும் $e:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கட்டும். A, A′ நீள்வட்டத்தின் மீது அமைந்த புள்ளிகளாகும். இங்கு e ஆனது மையத் தொலைத் தகவு.

C ஐ AA′ இன் மையப்புள்ளி மற்றும் $AA' = 2a$ என்க. CA ஐ x அச்சாகவும், CA க்கு செங்குத்துக் கோடு Cy ஐ y அச்சாகவும் கொள்க. C ஆதியாகும்.

$\therefore \quad \frac{SA}{AZ} = e \,,\ \frac{SA'}{A'Z} = e$

$\therefore \quad SA \;=\; e\,(AZ)$ -------- (1)

$A'S \;=\; e\,(A'Z)$ ---------(2)

$(1) + (2) \quad \Rightarrow SA + A'S = e\,(AZ + A'Z)$

$AA' \;=\; e\,(CZ - CA + A'C + CZ)$

$2a \;=\; e(2CZ)$ (ℇ $CA = CA'$)

$\Rightarrow \quad CZ \;=$

$(2) - (1) \quad \Rightarrow A'S - SA \;=\; e\,(A'Z - AZ)$

$A'C + CS - (CA - CS) = e\,(AA')$

அல்லது $2CS = e\ .\ 2a \quad \Rightarrow \quad CS \;=\; ae$

எனவே $S(ae, 0)$ ஆகும்.

$P(x, y)$ நீள்வட்டத்தின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

$PM \perp DD'$ மற்றும் $PN \perp CZ$ என வரைக.

$\Rightarrow \quad PM \;=\; NZ = CZ - CN \;=\; \frac{a}{e} - x$

$\frac{SP}{PM} \;=\; e$ (ℇ P நீள்வட்டத்தின் மீது ஒரு புள்ளி)

$SP^2 \;=\; e^2\,PM^2$

$(x - ae)^2 + y^2 \;=\; e^2\,\left(\frac{a}{e} - x\right)^2 = (a - ex)^2$

$x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 = a^2 - 2aex + e^2x^2$

$x^2\,(1 - e^2) + y^2 \;=\; a^2\,(1 - e^2)$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$

$b^2 \;=\; a^2(1 - e^2)$ என்க.

எனவே, $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad \boldsymbol{(a > b)}$

இது நீள்வட்டத்தின் திட்ட வடிவமாகும்

2.3.2 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தை வரைதல்

(i) வளைவரை ஆதிப்புள்ளி வழியாக செல்லாது. $y = 0$ எனில், $x = \pm a$. $\therefore$ நீள்வட்டம் x அச்சை $(\pm a, 0)$ என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றது. y அச்சை $(0, \pm b)$ என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றது.

(ii) சமன்பாடு x, y களில் இரட்டைப்படியுடையது. எனவே வளைவரையானது x, y அச்சுகளைப் பொறுத்து சமச்சீர் உடையது. நீள்வட்டத்தில் (x, y) ஒரு புள்ளி எனில், $(-x, y)$, $(x, -y)$ மற்றும் $(-x, -y)$ என்பனவும் அதன் புள்ளிகளாகும்.

(iii) நீள்வட்டத்தின் சமன்பாட்டை, $y = \pm \dfrac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ என்ற வடிவில் எழுதலாம். $|x| > a$ எனில், அதாவது $x > a$ அல்லது $x < -a$ எனில், $a^2 - x^2 < 0$. $\therefore \sqrt{a^2 - x^2}$ கற்பனை. எனவே, $x = a$ என்ற கோட்டின் வலப்புறத்திலும் $x = -a$ என்ற கோட்டின் இடப்புறத்திலும் வளைவரை அமையாது.

$|x| \leq a$ எனில், $a^2 - x^2 \geq 0$. எனவே ஒவ்வொரு x-க்கும் இரு சம ஆனால் மாறுபட்ட குறிகளையுடைய y மதிப்புகள் கிடைக்கும்.

வளைவரை, $x = a$ மற்றும் $x = -a$ என்ற இரண்டு கோடுகளுக்குள் அடங்கும். $x = a$ என்பது $A(a, 0)$ இல் தொடுகோடு என்பதையும் மற்றும் $x = -a$ என்பது $A'(-a, 0)$ இல் தொடுகோடு என்பதையும் கவனிக்கவும்.

(iv) வளைவரையின் சமன்பாட்டை, $x = \pm \dfrac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$ என்ற வடிவத்தில் எழுதலாம். வளைவரை $y = b$ என்ற கோட்டிற்கு மேற்புறமும், $y = -b$ என்ற கோட்டிற்கு கீழ்புறமும் அமையாது. வளைவரை $y = b$ மற்றும் $y = -b$ என்ற கோடுகளுக்கு இடையில் முழுவதுமாக அமைந்துள்ளது. இந்த இரண்டுக் கோடுகளும் முறையே, B மற்றும் B′ இல் வரையப்படும் தொடுகோடுகளாகும்.

(v) x ஆனது 0 முதல் a வரை கூடும்பொழுது, y ஆனது b முதல் 0 வரை குறைகிறது.

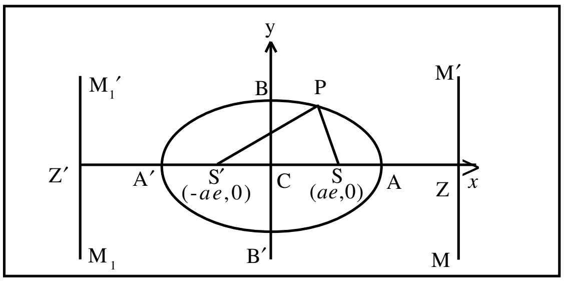
(vi) **செவ்வகலம் (Latus rectum) :** S இன் வழியாக, LSL′ஐ AS-க்குச் செங்குத்தாக வரைக.

$x = ae$ எனில், $\frac{a^2e^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2(1-e^2) = b^2\left(\frac{b^2}{a^2}\right) = \frac{b^4}{a^2}$

(அ−து) $y = \pm\frac{b^2}{a} \Rightarrow \text{SL} = \text{SL}' = \frac{b^2}{a}$.

எனவே, $\text{LL}' = \frac{2b^2}{a}$ நீள்வட்டத்தின் செவ்வகலம்.

வளைவரையின் வடிவம் பற்றிய மேற்காணும் கருத்துகளைக் கொண்டு, வளைவரையை படம் **2.9** இல் உள்ளது போல் வரையமுடியும். பரவளையம் போல் அல்லாமல், நீள்வட்டம் ஓர் மூடிய வளைவரையாகும்



படம் 2.9

நீள்வட்டத்தின் முக்கிய பண்பு

S மற்றும் S′ ஐ குவியங்களாக கொண்ட நீள்வட்டத்தின் மீது P ஏதேனும் ஓர் புள்ளி எனில், SP + S′P = $2a$ இங்கு $2a$ நெட்டச்சின் நீளம் ஆகும்.

2.3.3 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் மையம், முனைகள், குவியங்கள், அச்சுகள் மற்றும் இயக்குவரைகள்.

(i) மையம் (Centre)

(x, y) வளைவரையின் மீது ஒரு புள்ளி எனில் $(-x, -y)$ என்பதும் வளைவரையின் மீது ஒரு புள்ளி ஆகும். மேலும் $(x, -y)$ வளைவரையின்

மீது ஒரு புள்ளி எனில், $(-x,\ y)$ என்பதும் வளைவரையின் மீது ஒரு புள்ளியாகும். இது, C வழியாக செல்லும் ஒவ்வொரு கோடும் C இலிருந்து சமதூரத்தில், வளைவரையை இரண்டு புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது என்பதைத் தெளிவாக்குகிறது. எனவே C என்ற புள்ளி, நீள்வட்டத்தின் மையப்புள்ளி என அழைக்கப்படுகிறது. C(0,0) ஆனது AA′ன் மையப்புள்ளி ஆகும்.

(ii) *முனைகள்* (Vertices)

S மற்றும் S′ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு வளைவரையை வெட்டும் புள்ளிகளான A மற்றும் A′ என்பன நீள்வட்டத்தின் முனைகள் என அழைக்கப்படுகின்றன. A $(a, 0)$ மற்றும் A′ $(-a, 0)$ ஆகும்.

(iii) *குவியங்கள்* (Foci)

S$(ae, 0)$ மற்றும் S' $(-ae\ , 0)$ என்ற புள்ளிகள் நீள்வட்டத்தின் குவியங்களாகும்.

(iv) *அச்சுகள்* (Axis)

வளைவரை AA′ மற்றும் BB′ என்ற கோடுகளைப் பொறுத்துச் சமச்சீருடையது. AA′ மற்றும் BB′ என்பன நீள்வட்டத்தின் **நெட்டச்சு (major axis)** மற்றும் **குற்றச்சு (minor axis)** எனப்படும்.

$$e < 1 \ \Rightarrow\ 1 - e^2 < 1$$

$$\therefore\ b^2 = a^2\,(1 - e^2) < a^2 \Rightarrow b < a.$$

$$\therefore\ BB' < AA'.$$

எனவே AA′ ஐ நெட்டச்சு எனவும், BB′ குற்றச்சு எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன. அரை நெட்டச்சு CA = a மற்றும் அரை குற்றச்சு CB = b ஆகும்.

(v) *இயக்குவரைகள்* (Directrices)

படம் **2.9** இல், இயக்குவரை MZ இன் சமன்பாடு, $x = \dfrac{a}{e}$

இயக்குவரை $M_1'\ Z'$-ன் சமன்பாடு $x = -\dfrac{a}{e}$

(vi) $b^2 = a^2\,(1-e^2)$ $\quad \therefore\ \boldsymbol{e = \sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}}$

எடுத்துக்காட்டு 10

$(-1, 1)$ ஐ ஒரு குவியமாகவும், அதையொத்த இயக்குவரை $x - y + 3 = 0$ எனவும், மையத்தொலைவு தகவு $\frac{1}{2}$ எனவும் கொண்ட நீள்வட்டத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு :

குவியம் $S(-1,1)$ இயக்குவரை $x - y + 3 = 0$, $e = \frac{1}{2}$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$P(x_1, y_1)$, நீள்வட்டத்தின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க. எனவே $SP^2 = e^2\, PM^2$ இங்கு PM என்பது Pயிலிருந்து $x - y + 3 = 0$ கோட்டிற்கு உள்ள செங்குத்துத் தொலைவு ஆகும்.

$$(x_1 + 1)^2 + (y_1 - 1)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{x_1 - y_1 + 3}{\sqrt{1+1}}\right)^2$$

$$8(x_1 + 1)^2 + 8\,(y_1 - 1)^2 = (x_1 - y_1 + 3)^2$$

$$7x_1^2 + 2x_1y_1 + 7y_1^2 + 10x_1 - 10y_1 + 7 = 0$$

(x_1, y_1) இன் நியமப்பாதை, அதாவது நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு

$7x^2 + 2xy + 7y^2 + 10x - 10y + 7 = 0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 11

$(2,0)$ மற்றும் $(-2, 0)$ என்ற புள்ளிகளைக் குவியங்களாகவும் மையத்தொலைத் தகவு $\frac{1}{2}$ எனவும் கொண்ட நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு :

$S\,(ae\,,\,0)$ மற்றும் $S'\,(-ae,0)$ என்ற புள்ளிகள், நீள்வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ இன் குவியங்கள் $(2,0)$, $(-2, 0)$ மற்றும் $e = \frac{1}{2}$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\Rightarrow ae = 2$ மற்றும் $e = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow a = 4$ அல்லது $a^2 = 16$

மையப்புள்ளி C, SS' இன் நடுப்புள்ளியாகும்.

எனவே C(0,0) ஆகும். S மற்றும் S′, x அச்சின் மீது உள்ளன.

நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

இங்கு $b^2 = a^2(1-e^2) = 16\left(1-\frac{1}{4}\right) = 12$

எனவே நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

எடுத்துக்காட்டு 12

$9x^2 + 16y^2 = 144$ என்ற நீள்வட்டத்தின், மையத் தொலைத் தகவு, குவியங்கள், செவ்வகலம் முதலியன காண்க.

தீர்வு :

நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$9x^2 + 16y^2 = 144 \qquad \therefore \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் வடிவம் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
இங்கு $a = 4$ மற்றும் $b = 3$

$\therefore \quad e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

S $(ae, 0)$ மற்றும் S′ $(-ae, 0)$ குவியங்கள்

(அ–து) S$(\sqrt{7},0)$ மற்றும் S′$(-\sqrt{7},0)$

செவ்வகலம் $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2(3^2)}{4} = \frac{9}{2}$

எடுத்துக்காட்டு 13

$3x^2 + 4y^2 - 6x + 8y - 5 = 0$ என்ற நீள்வட்டத்தின் மையம், மையத்தொலைத் தகவு, குவியங்கள், இயக்குவரைகள் முதலியனவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடு

$(3x^2 - 6x) + (4y^2 + 8y) = 5$

$\Rightarrow \quad 3(x-1)^2 + 4(y+1)^2 \quad = 5 + 3 + 4 = 12$

$\Rightarrow \quad \dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y+1)^2}{3} = 1$

இதில் $X = x - 1$ மற்றும் $Y = y + 1$ எனில், $\dfrac{X^2}{4} + \dfrac{Y^2}{3} = 1$

இதை $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிட,

$$b^2 = a^2 (1 - e^2) \Rightarrow 3 = 4(1 - e^2) \Rightarrow e = \frac{1}{2}$$

இப்போது விடைகளை பட்டியலிடலாம் :

	(X, Y)ஐ பொறுத்து	**(x, y) ஐ பொறுத்து $x = X+1, y = Y-1$**
மையம்	(0,0)	(0+1, 0 −1) = (1, −1)
குவியங்கள்	$(\pm ae, 0)$ = (1,0) மற்றும் (−1, 0)	(2, −1) மற்றும் (0, −1)
இயக்கு வரைகள்	$X = \pm \dfrac{a}{e}$ (அ) $X = \pm 4$	$x - 1 = \pm 4$ (அ) $x = 5$ மற்றும் $x = -3$

பயிற்சி 2.3

1) பின்வரும் விபரங்களுக்கு நீள்வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க

   (i) குவியம் (1, 2) இயக்குவரை $2x - 3y + 6 = 0$ மற்றும் மையத் தொலைத் தகவு $\dfrac{2}{3}$

   (ii) குவியம் (0, 0) இயக்குவரை $3x + 4y - 1 = 0$ மற்றும் மையத் தொலைத் தகவு $\dfrac{5}{6}$

   (iii) குவியம் (1, −2) இயக்குவரை $3x-2y+1 = 0$ மற்றும் $e = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

2) பின்வரும் விபரங்களுக்கு நீள்வட்டத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.

   (i) குவியங்கள் (4, 0), (−4, 0) மற்றும் $e = \dfrac{1}{3}$

   (ii) குவியங்கள் (3, 0), (−3, 0) மற்றும் $e = \sqrt{\dfrac{3}{8}}$

   (iii) முனைகள் $(0, \pm 5)$ மற்றும் குவியங்கள் $(0, \pm 4)$.

3) பின்வரும் நீள்வட்டத்தின் மையம், முனைகள், மையத்தொலைத் தகவு, குவியங்கள், செவ்வகலம் மற்றும் இயக்குவரைகளைக் காண்க.

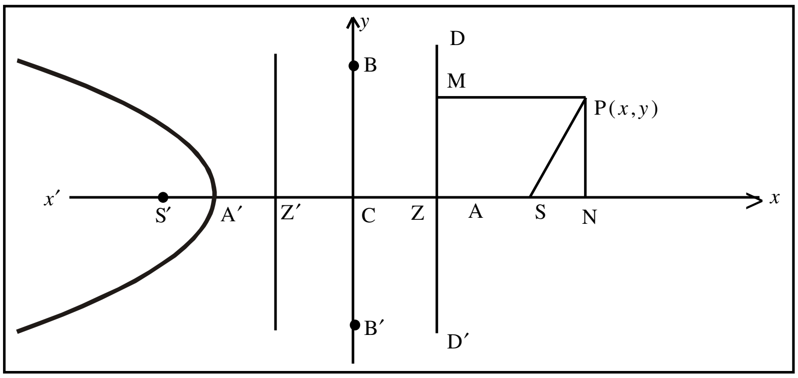
(i) $9x^2 + 4y^2 = 36$

(ii) $7x^2 + 4y^2 - 14x + 40y + 79 = 0$

(iii) $9x^2 + 16y^2 + 36x - 32y - 92 = 0$

2.4 அதிபரவளையம்

2.4.1 அதிபரவளையத்தின் திட்ட வடிவம்



படம் 2.10

S ஐ குவியம் மற்றும் DD′ ஐ இயக்குவரை என்க. $SZ \perp DD'$ என வரைக. A, A′ என்ற புள்ளிகள் முறையே SZ ஐ உட்புறமாகவும் வெளிப்புறமாகவும் $e{:}1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கட்டும். இங்கு ‘e’ மையத் தொலைத் தகவு ஆகும். $\therefore$ A, A′ அதிபரவளையத்தின் மீது உள்ளன. AA′ ன் மையப்புள்ளி C ஐ ஆதியாகவும், CZ ஐ x அச்சாகவும் CZ-க்கு செங்குத்துக் கோடு Cy ஐ y அச்சாகவும் எடுத்துக் கொள்க.

$AA' = 2a$ என்க. $\dfrac{SA}{AZ} = e, \quad \dfrac{SA'}{A'Z} = e.$

$$\therefore \qquad SA = e\,(AZ) \qquad \text{-----------}(1)$$

$$\text{மற்றும்} \quad SA' = e\,(A'Z) \qquad \text{-----------}(2)$$

$$(1) + (2) \;\Rightarrow\; SA + SA' = e\,(AZ + A'Z)$$

$$CS - CA + CS + CA' = e\,.\,AA'$$

$$2CS = e.\,2a \Rightarrow CS = ae$$

$$(2) - (1) \Rightarrow SA' - SA = e\,(A'Z - AZ)$$

$$AA' = e\,(CZ + CA' - CA + CZ)$$

$$2a = e.\,2CZ \quad \therefore\ CZ = \frac{a}{e}$$

$P(x, y)$ ஆனது அதிபரவளையத்தில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.

$PM \perp DD'$ மற்றும் $PN \perp CA$ என வரைக.

$\therefore \quad \frac{SP}{PM} = e$ அல்லது $SP^2 = e^2\, PM^2$

$$\Rightarrow (x - ae)^2 + (y - 0)^2 = e^2\,[CN - CZ]^2$$

$$= e^2\,(x - \frac{a}{e})^2 = (xe - a)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2\,(e^2 - 1) - y^2 = a^2e^2 - a^2$$

$$x^2\,(e^2 - 1) - y^2 = a^2\,(e^2 - 1)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1$$

$b^2 = a^2\,(e^2 - 1)$ என்க.

$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

இதுவே அதிபரவளையத்தின் திட்ட வடிவமாகும். கோடு AA' ஐ **குறுக்கச்சு (transverse axis)** என்றும், மற்றும் AA' க்கு செங்குத்தாக C இன் வழியாகச் செல்லும் கோடு **துணையச்சு (conjugate axis)** என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

2.4.2 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபரவளையத்தை வரைதல்

(i) வளைவரை ஆதிபுள்ளி வழியாக செல்லவில்லை. $y = 0$ எனில் $x = \pm a$. $\therefore$ வளைவரை, x அச்சை $(\pm a, 0)$ என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றது. மையத்திலிருந்து சம தொலைவுகளில் x அச்சினை, A மற்றும் A' புள்ளிகளில் வளைவரை வெட்டுகின்றது. எனவே $CA = CA' = a$ மற்றும் $AA' = 2a$.

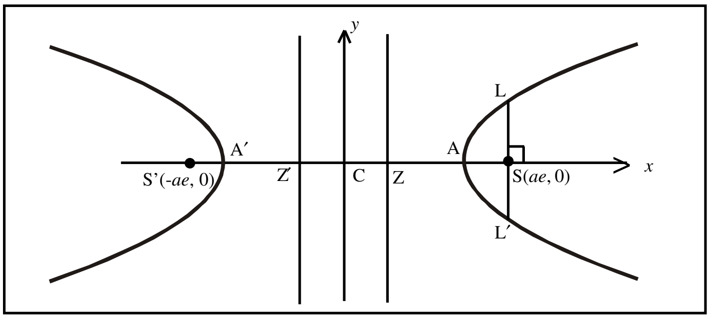
$x = 0$ எனில், y கற்பனையாகிறது. எனவே வளைவரை y அச்சை சந்திக்காது. y அச்சின் மீது B மற்றும் B' என்ற புள்ளிகளை $CB = CB' = b$ என எடுத்துக் கொள்க. எனவே $BB' = 2b$.

(ii) சமன்பாட்டில் x, y கள் இரட்டைபடிகளில் உள்ளமையால், x மற்றும் y அச்சுகளைப் பொறுத்து வளைவரையானது சமச்சீருடையது.

(iii) அதிபரவளையத்தின் சமன்பாட்டை $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ என்ற வடிவில் எழுதலாம் . $|x| \geq a$ எனில், $x^2 - a^2 \geq 0$. எனவே ஒவ்வொரு x க்கும் இரு சம ஆனால் எதிரிடையான y மதிப்புகள் கிடைக்கும். இதில் $x \to \infty$ எனில், $|y| \to \infty$.

$|x| < a$ எனில், $x^2 - a^2 < 0$. எனவே y கற்பனையாகிறது. அதனால் வளைவரை $x = -a$ மற்றும் $x = a$ என்று கோடுகளுக்கு இடையில் அமையவில்லை. வளைவரை $x = -a$ என்ற கோட்டிற்கு இடப்புறமும், மற்றும் $x = a$ என்ற கோட்டிற்கு வலபுறமும் அமைந்துள்ளது.

(iv) வளைவரையின் சமன்பாட்டை, $x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}$ என்ற வடிவில் எழுதலாம். இதிலிருந்து எந்தவிதக் கட்டுப்பாடுமின்றி எல்லா மெ– மதிப்புகளையும் y ஏற்க முடியும் என்றும் ஒவ்வொரு y-ன் மதிப்புற்கும் சமமான மற்றும் எதிரிடையான இரு மதிப்புகள் x-க்கு கிடைக்கின்றன என்றும் நாம் அறிகிறோம். இந்தக் கருத்துகள் வளைவரையின் வடிவத்தை அறிவதற்கு போதுமானவையாகும். எனவே வளைவரையை படம் 2.11 இல் காட்டியபடி வரைய முடிகிறது.



படம் 2.11

(v) **செவ்வகலம் :**
S இன் வழியாக, $LSL' \perp AS$ என வரைக.

$x = ae$,எனில் $\quad \dfrac{a^2e^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

அல்லது $\quad y^2 = b^2\,(e^2-1) = b^2 \left(\dfrac{b^2}{a^2}\right) = \dfrac{b^4}{a^2}$

அல்லது $\; y = \pm\, \dfrac{b^2}{a} \Rightarrow \text{SL} = \text{SL}' = \dfrac{b^2}{a}$.

எனவே $\text{LL}' = \dfrac{2b^2}{a}$ அதிபரவளையத்தின் செவ்வகலமாகும்.

முக்கிய பண்பு: S மற்றும் S′ களைக் குவியங்களாகக் கொண்ட அதிபரவளைத்தில் P ஏதேனும் ஒரு புள்ளி எனில், SP ~ S′P = $2a$. இங்கு $2a$ ஆனது குறுக்கச்சின் நீளம்.

2.4.3 வளைவரையின் தொலைத் தொடுகோடு

ஒரு வளைவரையின் தொலைத் தோடுகோடு என்பது, முழுவதும் கந்தழியில் இல்லாமல், வளைவரையைக் கந்தழியில் சந்திக்கும் தொடுகோடு ஆகும்.

குறிப்பு

$ax^2 + bx + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் இரு மூலங்களும் பூச்சியம் எனில், $b = c = 0$ ஆகும். இரு மூலங்களும் கந்தழியெனில், $a = b = 0$ ஆகும்.

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபர வளையத்தின் தொலைத் தொடுகோடுகள்

$y = mx + c$ என்ற கோடும் மற்றும் அதிபரவளையம் வெட்டும் புள்ளி, $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{(mx+c)^2}{b^2} = 1$ ஆல் கொடுக்கப்படுகிறது.

(அ–து) $x^2\left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{m^2}{b^2}\right) - \dfrac{2mc}{b^2}x - \dfrac{c^2}{b^2} - 1 = 0$

$$x^2\,(b^2 - a^2m^2) - 2ma^2cx - a^2c^2 - a^2b^2 = 0$$

$y = mx + c$ ஆனது தொலைத் தொடுகோடு எனில், இந்த சமன்பாட்டின் இரு தீர்வுகளுமே கந்தழியாகும்.

$\therefore$ x-ன் கெழு = 0 மற்றும் x^2 -ன் கெழு = 0.

$\Rightarrow$ $-2ma^2c = 0$ மற்றும் $b^2 - a^2 m^2 = 0$. $\therefore$ $c = 0$, $m = \pm\frac{b}{a}$

எனவே, இரு தொலைத் தொடுகோடுகள் உள்ளன.

அவைகள், $y = \frac{b}{a}x$ மற்றும் $y = -\frac{b}{a}x$

(அ-து) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ மற்றும் $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$

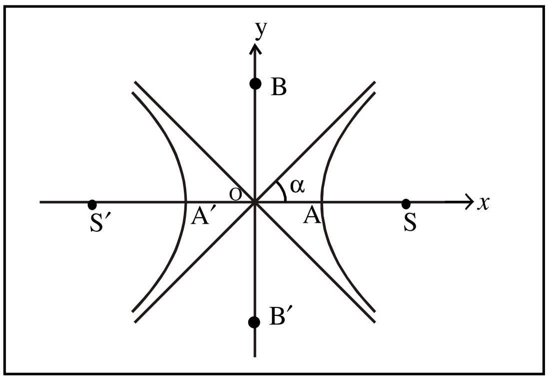
தொலைத் தொடுகோடுகளின் சேர்ப்புச் சமன்பாடு

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0 \quad \text{அல்லது} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

குறிப்பு

(i) அதிபரவளையத்தின் தொலை தொடுகோடுகள், மையம் C(0,0) வழியாக செல்கின்றன (படம் 2.12) என்பது வெளிப்படை.

(ii) தொலைத் தொடுகோடுகளின் சா–வுகள் $\frac{b}{a}, -\frac{b}{a}$. ஆகவே, தொலைத் தொடுகோடுகள் அதிபரவளையத்தின் குறுக்கச்சுடன் சமமான கோணங்களை உண்டாக்குகின்றன. அதாவது குறுக்கச்சும், துணையச்சும், தொலைத் தொடுகோடுகளுக்கு இடைப்பட்டக் கோணங்களை இருசமக் கூறிடுகின்றன (படம் 2.12).



படம் 2.12.

(iii) 2 α என்பது தொலைத்தொடுகோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் எனில் $\tan \alpha = \frac{b}{a}$

$\therefore$ தொலைத்தொடு கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்

$$= 2 \tan^{-1} \left(\frac{b}{a}\right)$$

(iv) தொலைத் தொடுகோடுகளின் சேர்ப்பு சமன்பாடானது அதிபரவளையத்தின் சமன்பாட்டிலிருந்து மாறிலி உறுப்பால் மட்டுமே வேறுபடுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 14

மையத் தொலைத் தகவு $\sqrt{2}$ மற்றும் இரு குவியங்களுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு 16 எனக் கொண்டுள்ள அதிபரவளையத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டுள்ளது $e = \sqrt{2}$

S மற்றும் S′ குவியங்கள் என்க. எனவே $S'S = 16$.

ஆனால் $S'S = 2ae \quad \therefore 2ae = 16 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$

மேலும் $b^2 = a^2 (e^2 - 1)$

$$= (4\sqrt{2})^2(2 - 1) = 32$$

அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{32} = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 32$$

2.4.4 செவ்வக அதிபரவளையம் (Rectangular Hyperbola)

ஓர் அதிபரவளையத்தில் தொலைத் தொடுகோடுகள் ஒன்றை யொன்று செங்கோணத்தில் வெட்டிக் கொண்டால், அதனை செவ்வக அதிபரவளையம் என்போம்.

தொலைத் தொடுகோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் 2α எனில் $\tan \alpha = \frac{b}{a}$. எனவே $\alpha = 45^0 \Rightarrow a = b$.

$\therefore$ செவ்வக அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $x^2 - y^2 = a^2$.

$\Rightarrow$ ஒரு பரவளையத்தில் குறுக்கச்சின் நீளமும், துணையச்சின் நீளமும் சமம் எனில் அது செவ்வக அதிபரவளையம் எனப்படும்.

$\therefore$ $b^2 = a^2(e^2-1) \Rightarrow a^2 = a^2(e^2-1)$ $\therefore$ $e = \sqrt{2}$

2.4.5 செவ்வக அதிபரவளையத்தின் திட்ட சமன்பாடு

செவ்வக அதிபரவளையத்தின் தொலைத் தொடுகோடுகளை x, y அச்சுகளாக எடுத்துக்கொள்க. தொலைத்தொடு கோடுகளின் சமன்பாடுகள் $x = 0$ மற்றும் $y = 0$.

அவற்றின் சேர்ப்புச் சமன்பாடு $xy = 0$.

அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு, தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாட்டிலிருந்து மாறிலி உறுப்பால் மட்டுமே வேறுபடுவதால், அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

$xy = k$ (k ஒரு மாறிலி) ------------- (1)

குறுக்கச்சு $AA' = 2a$ என்க. x அச்சுக்கு செங்குத்தாக AM வரைக.

$\angle ACM = 45^\circ$ இங்கு C மையம்.

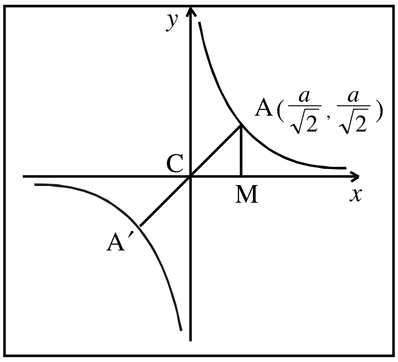
எனவே $CM = CA \cos 45^\circ = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$MA = CA \sin 45^\circ = \frac{a}{\sqrt{2}}$

எனவே A ஆனது $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$

இது செவ்வக அதிபரவளையத்தின் ஒரு புள்ளி.

$k = \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{2}$



படம் 2.13

செவ்வக அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $xy = \frac{a^2}{2}$

இதிலிருந்து $xy = c^2$, இங்கு $c^2 = \frac{a^2}{2}$.

இதுவே செவ்வக அதிபரவளையத்தின் திட்டச் சமன்பாடு.

எடுத்துக்காட்டு 15

மையத்தொலைத் தகவு $\sqrt{3}$ குவியம் (1, 2), இயக்குவரை $2x + y = 1$ என்றும் கொண்ட அதிபரவளையத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

குவியம் (1, 2), இயக்குவரை $2x + y = 1$, $e = \sqrt{3}$

$P(x_1, y_1)$ என்பது அதிபரவளையத்தின் மீது ஒரு புள்ளி எனில் $SP^2 = e^2\, PM^2$, இங்கு PM என்பது $2x + y = 1$க்கு குத்துக்கோடு.

$$\Rightarrow \quad (x_1 - 1)^2 + (y_1 - 2)^2 = 3\,\frac{(2x_1 + y_1 - 1)^2}{5}$$

$$\Rightarrow \quad 5(x_1^2 - 2x_1 + 1 + y_1^2 - 4y_1 + 4) = 3\,(2x_1 + y_1 - 1)^2$$

$$\Rightarrow \quad 7x_1^2 + 12x_1y_1 - 2y_1^2 - 2x_1 + 14y_1 - 22 = 0$$

$\therefore$ (x_1, y_1) இன் நியமப்பாதை

$$7x^2 + 12xy - 2y^2 - 2x + 14y - 22 = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 16

$2x^2 + 5xy + 2y^2 - 11x - 7y - 4 = 0$ என்ற பரவளையத்தின் தொலைத் தொடுகோடுகளின் $\frac{1}{2}$ சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

தொலைத் தொடுகோடுகளின் சேர்ப்பு சமன்பாடு, அதிபர வளையத்தின் சமன்பாட்டிலிருந்து மாறிலி உறுப்பால் மட்டுமே வேறுபடுகிறது.

எனவே தொலைத் தொடுகோடுகளின் சேர்ப்பு சமன்பாடு

$2x^2 + 5xy + 2y^2 - 11x - 7y + k = 0$ (இங்கு k ஒரு மாறிலி) --------(1)

தொலைத் தொடுகோடுகள் இரட்டை நேர்கோடுகள். இரட்டை நேர்கோடுகளுக்கான கட்டுப்பாடு

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0 \qquad \text{-------------(2)}$$

சமன்பாடு (1) இல்,

$$a = 2,\ h = \frac{5}{2}\ ,\ b = 2\ ,\ f\ = \frac{-7}{2},\ g = - \quad ,\ c = k$$

(2) இல் பிரதியிட, $k = 5$.

தொலைத் தொடுகோடுகளின் சேர்ப்பு சமன்பாடு

$2x^2 + 5xy + 2y^2 - 11x - 7y + 5 = 0$

$\Rightarrow \quad (2x^2 + 5xy + 2y^2) - 11x - 7y + 5 = 0$

$\Rightarrow \quad (2x + y)(x + 2y) - 11x - 7y + 5 = 0$

$\Rightarrow \quad (2x + y + l)(x + 2y + m) = 0$

$\Rightarrow \quad l + 2m = -11$ (x-ன் கெழு)

$2l + m = -7$ (y-ன் கெழு)

$\Rightarrow \quad l = -1, m = -5$

$\therefore$ தொலை தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$2x + y - 1 = 0$ மற்றும் $x + 2y - 5 = 0$.

எடுத்துக்காட்டு 17

$9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$ என்ற அதிபரவளையத்தின் மையம், மையத் தொலைவு தகவு, குவியங்கள் மற்றும் செவ்வகலம் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டை

$9(x^2 - 2x) - 16(y^2 + 4y) = 199$ என எழுதலாம்.

$\Rightarrow \quad 9(x - 1)^2 - 16(y + 2)^2 = 199 + 9 - 64 = 144$

$\Rightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

$X = x - 1$ மற்றும் $Y = y + 2$ எனில், $\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{9} = 1$

$b^2 = a^2(e^2 - 1) \Rightarrow \quad e^2 = \frac{9}{16} + 1 = \frac{25}{16} \quad \Rightarrow e = \frac{5}{4}$

இப்போது விடைகளைப் பட்டியலிடலாம்.

	(X, Y)ஐ பொறுத்து	**(x, y)ஐ பொறுத்து $x = X+1, y = Y-2$**
மையம்	$(0,0)$	$(0 + 1, 0 - 2) = (1, -2)$
குவியங்கள்	$(\pm ae, 0)$ $= (5,0)$ மற்றும் $(-5,0)$	$(5+1, 0-2)$ மற்றும் $(-5+1, 0-2)$ $(6, -2)$ மற்றும் $(-4, -2)$
செவ்வகலம்	$= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 9}{4} = \frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$

எடுத்துக்காட்டு 18

$x + 4y - 5 = 0$, $2x - 3y + 1 = 0$ என்ற தொலைத் தொடுகோடுகளைக் கொண்டதும் மற்றும் (1, 2) என்ற புள்ளி வழி செல்வதுமான அதிபரவளையத்தின் சமன்பாட்டை காண்க.

தீர்வு :

தொலைத் தொடுகோடுகளின் சேர்ப்பு சமன்பாடு

$$(x + 4y - 5)\ (2x - 3y + 1) = 0$$

அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு, தொலைத் தொடுகோடுகளின் சேர்ப்பு சமன்பாட்டிலிருந்து மாறிலி உறுப்பால் மட்டுமே வேறுபடுகிறது. அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு

$(x + 4y - 5)\ (2x - 3y + 1) = k$, k ஒரு மாறிலி

$\therefore$ அதிபரவளையம் (1, 2) என்ற புள்ளி வழியாக செல்வதால்

$$[1 + 4(2) - 5]\ [2(1) - 3(2) + 1] = k \Rightarrow k = -12$$

அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு $(x + 4y - 5)\ (2x - 3y + 1) = -12$

அல்லது $2x^2 + 5xy - 12y^2 - 9x + 19y + 7 = 0.$

எடுத்துக்காட்டு 19

A மற்றும் B என்ற இரு இடங்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு 100கி.மீ. A-இல் ஒரு பொருளின் ஓரலகு உற்பத்திச் செலவு B-இல் அதே பொருளின் உற்பத்திச் செலவைவிட ரூ. 12 குறைவாக உள்ளது. உற்பத்திச் செ-யப்பட்ட பொருட்கள் நேர்க்கோட்டுப் பாதையில் அனுப்பப்பட்டு அளிக்கப்படுகின்றன என்றும், அனுப்பும் செலவு ஒரு அலகுக்கு ஒரு கிலோ மீட்டருக்கு 20 பைசா என்றும் கொள்க. எந்தெந்த இடங்களுக்கு A-இல் இருந்து அனுப்பி வைத்தாலும், B-இல் இருந்து அனுப்பி வைத்தாலும் மொத்த செலவு சமமாக இருக்குமோ அவ்விடங்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகள் அமையும் வளைவரையைக் காண்க.

தீர்வு:

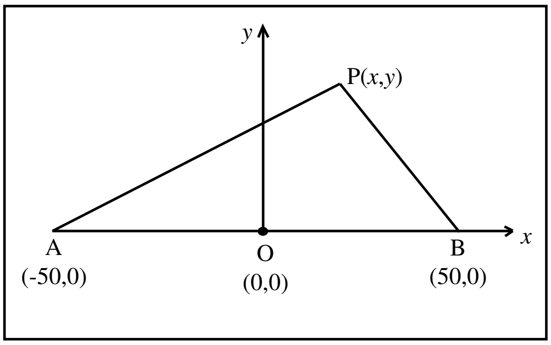
AB-இன் மையப்புள்ளியை ஆதிப்புள்ளி O என தெரிவு செ–க.

தேவையான வளைவரையின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி P என்க. எனவே A-இல் இருந்தோ அல்லது B-இல் இருந்தோ பொருளை P-க்கு அனுப்பி வைக்கும் மொத்த செலவு சமமாக இருக்கும்.

B-இல், ஓரலகின் விலை = C என்க

$\therefore$ A-இல், ஓரலகின் விலை = C − 12

A-இல் இருந்து P-க்கு, ஓரலகுக்கு அனுப்பப்படும் செலவு = $\frac{20}{100}$(AP)



படம் 2.14

B-இல் இருந்து P-க்கு ஓரலகுக்கு அனுப்பப்படும் செலவு = $\frac{20}{100}$ (BP)

A-இல் இருந்து அனுப்பி வைத்தாலும், B-இல் இருந்து அனுப்பி வைத்தாலும் மொத்தச் செலவு சமம்.

$$\therefore \quad (C-12) + \frac{20}{100}(AP) = C + \frac{20}{100}(BP)$$

$$\therefore \quad \frac{AP}{5} - \frac{BP}{5} = 12 \qquad \text{i.e. } AP - BP = 60$$

$$\sqrt{(x+50)^2 + y^2} - \sqrt{(x-50)^2 + y^2} = 60$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 100x + 2500} - \sqrt{x^2 + y^2 - 100x + 2500} = 60$$

$$\Rightarrow \quad 6400x^2 - 3600y^2 = 5760000$$

$$\therefore \quad 16x^2 - 9y^2 = 14400$$

$$\frac{x^2}{900} - \frac{y^2}{1600} = 1 \qquad \therefore \quad \frac{x^2}{(30)^2} - \frac{y^2}{(40)^2} = 1$$

இவ்வாறு நாம் பெறும் வளைவரை ஓர் அதிபரவளையம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 20

ஓர் இயந்திரம் ரூ.p விலைக்கு விற்கப்படுகிறது. அதன் ஓராண்டிற்கான தேவை x (நூறுகளில்), $x = \dfrac{90}{p+5} - 6$ ஆகும். இந்த தேவை விதியைக் குறிக்கும் தேவை வளைவரை யாது? எந்த விலை அளவில் தேவையானது பூச்சியத்தை அணுகும்?

தீர்வு :

தேவை வளைவரை

$$x + 6 = \frac{90}{p+5} \quad \Rightarrow (x + 6)\,(p + 5) = 90$$

$\Rightarrow$ XP = 90 இங்கு X = x+6, P = p +5

$\therefore$ தேவை வளைவரை ஒரு செவ்வக அதிபரவளையம் ஆகும்

$x = 0 \Rightarrow 6(p+5) = 90 \Rightarrow p =$ ரூ.10.

பயிற்சி 2.4

1) அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

(a) குவியம் (2, 2), மையத்தொலைத் தகவு $\frac{3}{2}$ மற்றும் இயக்குவரை $3x - 4y = 1$.

(b) குவியம் (0, 0), மையத்தொலைத் தகவு $\frac{5}{4}$ மற்றும் இயக்குவரை $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$.

2) குவியங்கள் (6, 4), (−4, 4) மற்றும் மையத் தொலைத் தகவு 2 எனில் அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

3) அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

(a) மையம் (1, 0), ஒரு குவியம் (6, 0) மற்றும் குறுக்கச்சின் நீளம் 6.

(b) மையம் (3, 2), ஒரு குவியம் (5, 2) மற்றும் ஒரு முனை (4, 2).

(c) மையம் (6, 2), ஒரு குவியம் (4, 2) மற்றும் $e = 2$.

4) கொடுக்கப்பட்ட அதிபரவளையத்தின் மையம், மையத்தொலைத் தகவு, குவியங்கள் மற்றும் இயக்குவரைகளைக் காண்க.

(a) $9x^2 - 16y^2 = 144$ (b) $\dfrac{(x+2)^2}{9} - \dfrac{(y+4)^2}{7} = 1$

(c) $12x^2 - 4y^2 - 24x + 32y - 127 = 0$

5) கொடுக்கப்பட்ட அதிபரவளையத்தின் தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க

(a) $3x^2 - 5xy - 2y^2 + 17x + y + 14 = 0$

(b) $8x^2 + 10xy - 3y^2 - 2x + 4y - 2 = 0$

6) $4x + 3y - 7 = 0$, $x - 2y = 1$ என்ற கோடுகளை தொலைத் தொடுகோடுகளாகக் கொண்டு மற்றும் $(2, 3)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்லும் அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

7) $3x - 4y + 7 = 0$, $4x + 3y + 1 = 0$ என்ற கோடுகளை தொலைத் தொடுகோடுகளாகக் கொண்டு, மற்றும் ஆதிப்புள்ளி வழிச் செல்லும் அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு காண்க.

பயிற்சி 2.5

ஏற்புடைய விடையைத் தெரிவு செ-க

1) பரவளையத்தின் மையத் தொலைத் தகவு

(a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) −1

2) ஒரு கூம்பு வெட்டியின் மையத் தொலைத்தகவு $\frac{1}{\sqrt{2}}$ எனில் அவ்வளைவரை

(a) ஒரு பரவளையம் (b) ஒரு நீள்வட்டம்

(c) ஒரு வட்டம் (d) ஒரு அதிபரவளையம்

3) $y^2 = 4ax$ இன் செவ்வகலம்

(a) $2a$ (b) $3a$ (c) $4a$ (d) a

4) $y^2 = -4ax$ இன் குவியம்

(a) $(a, 0)$ (b) $(0, a)$ (c) $(0, -a)$ (d) $(-a, 0)$

5) $x^2 = 4ay$ இன் இயக்குவரை

(a) $x + a = 0$ (b) $x - a = 0$ (c) $y+a = 0$ (d) $y - a = 0$

6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்பது ஒரு நீள்வட்டத்தைக் குறிக்கும் $(a > b)$ எனில்

(a) $b^2 = a^2 (1 - e^2)$ (b) $b^2 = -a^2(1-e^2)$

(c) $b^2 = \frac{a^2}{1-e^2}$ (d) $b^2 = \frac{1-e^2}{a^2}$

7) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a > b)$ என்ற நீள்வட்டத்தின் செவ்வகலம்

(a) $\frac{2a^2}{b}$ (b) $\frac{a^2}{2b}$ (c) $\frac{2b^2}{a}$ (d) $\frac{b^2}{2a}$

8) $y^2 = 16x$ இன் குவியம்

(a) (2, 0) (b) (4, 0) (c) (8, 0) (d) (2, 4)

9) $y^2 = -8x$ இன் இயக்குவரை

(a) $x + 2 = 0$ (b) $x-2 = 0$ (c) $y+2= 0$ (d) $y-2 = 0$

10) $3x^2 + 8y = 0$ இன் செவ்வகலத்தின் நீளம்

(a) $\frac{8}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) 8 (d) $\frac{3}{8}$

11) $x^2 + 16y = 0$ என்ற பரவளையம் அமையும் பகுதி

(a) x-அச்சுக்கு மேல் (b) x-அச்சுக்கு கீழ்

(c) y-அச்சுக்கு இடப்புறம் (d) y-அச்சுக்கு வலப்புறம்

12) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}$ = 1-இன் அரைநெட்டச்சு மற்றும் அரை குற்றச்சு நீளங்கள் முறையே

(a) (4, 5) (b) (8, 10) (c) (5, 4) (d) (10, 8)

13) $4x^2 + 9y^2 = 36$ இன் செவ்வகல நீளம்

(a) $\frac{4}{3}$ (b) $\frac{8}{3}$ (c) $\frac{4}{9}$ (d) $\frac{8}{9}$

14) ஒரு நீள்வட்டத்தின் $e = \frac{3}{5}$ எனவும், அரைக்குற்றச்சின் நீளம் 2 எனவும் அமைகிறது. அதன் நெட்டச்சின் நீளம்

(a) 4 (b) 5 (c) 8 (d) 10

15) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}$ = 1 என்ற அதிபரவளையத்தின் மையத் தொலைத் தகவு

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{9}{4}$ (c) $\frac{5}{4}$ (d) 4

16) நீள் வட்டத்தின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் குவித்தொலைவுகளின் கூடுதல் எந்த நீளத்திற்குச் சமம்

(a) குற்றச்சு (b) அரைக்குற்றச்சு

(c) நெட்டச்சு (d) அரை நெட்டச்சு

17 அதிபரவளையத்தின் மீது ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் குவித் தொலைவுகளின் வித்தியாசம் எதற்குச் சமம்**?**

(a) குறுக்கச்சு (b) அரைக்குறுக்கச்சு

(c) துணையச்சு (d) அரைத் துணையச்சு

18) அதிபரவளையத்தின் தொலைத் தொடுகோடுகள் செல்லும் புள்ளி,

(a) குவியங்களில் ஒன்று (b) முனைகளில் ஒன்று

(c) அதிபரவளையத்தின் மையம் (d) செவ்வகலத்தின் ஒரு முனை

19) செவ்வக அதிபரவளையத்தின் மையத் தொலைத் தகவு

(a) 2 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

20) $xy = c^2$ என்ற செவ்வக அதிபரவளையத்தின் அரைகுறுக்கச்சு நீளம் a எனில் c^2 இன் மதிப்பு

(a) a^2 (b) $2a^2$ (c) $\frac{a^2}{2}$ (d) $\frac{a^2}{4}$

வகையீட்டின் பயன்பாடுகள் - I 3

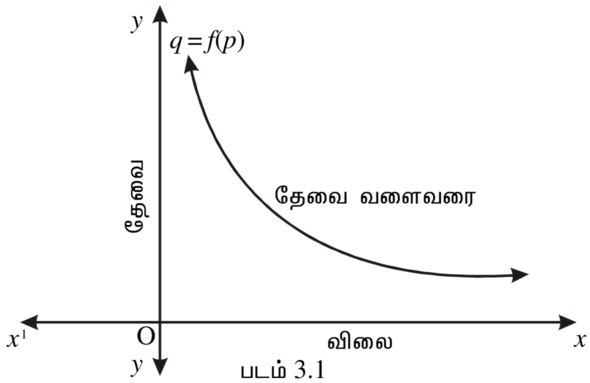
பொருளியல் மற்றும் வணிகவியல் பாடங்களில் வகையீட்டின் பயன்பாடு இன்றியமையாதது ஆகும். இந்த துறைகளில் வகையீட்டின் பயன்பாடுகளைப் பற்றி அறிவதற்கு முன் நாம் இங்கு பொருளியலில் உள்ள முக்கிய சொற்றொடர்களை அதன் வழக்கமான குறியீட்டின் மூலம் அறிமுகபடுத்துவோம்.

3.1 பொருளியல் மற்றும் வணிகவியல்களில் உள்ள சார்புகள்

3.1.1 தேவைச் சார்பு (Demand function)

ஒரு பொருளின் தேவை (அல்லது அளவு) q என்க. அதன் விலையை p என்க. தேவைச் சார்பானது $q = f(p)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. பொதுவாக p-யும் q-வும் மிகை எண்கள். மற்றும் இவைகள் ஒன்றுக்கொன்று எதிர்விகிதத்தில் இருக்கும்.

தேவைச் சார்பு $q = f(p)$-ன் வரைபடத்தைக் கவனிக்க.



படம் 3.1

வரைபடத்திலிருந்து நாம் பெறுவன (படம் 3.1) :

(i) p -யும் q-வும் மிகை எண்களாக இருப்பதால் வரைபடத்தில் தேவைச் சார்பு, முதல் கால் பகுதியில் மட்டும் இடம் பெற்றுள்ளது.

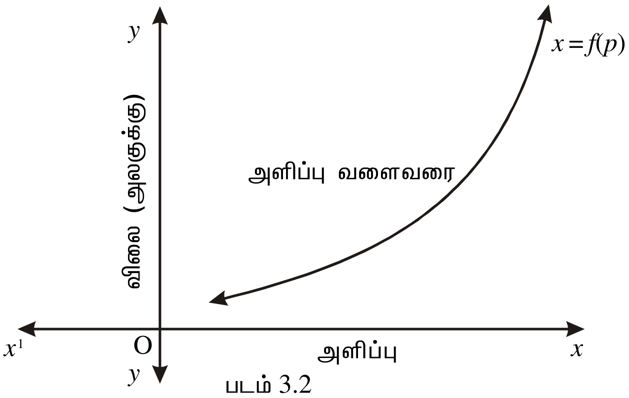
(ii) தேவைச் சார்பின் சா–வு ஒரு குறை எண் ஆகும்.

3.1.2 *அளிப்புச் சார்பு* (Supply function)

சந்தையில் ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளின் விலை p என்க. விற்கப்படும் பொருளின் அளவு x எனில், அப்பொருளின் அளிப்புச் சார்பு $x = f(p)$ ஆகும். இங்கு p ஒரு மாறி

பொதுவாக x, p நேர் விகிதத்தில் இருக்கும்.

அளிப்புச் சார்பு $x = f(p)$-ன் வரைபடத்தைக் கவனிக்க.



படம் 3.2

வரைபடத்திலிருந்து நாம் பெறுவன (படம் 3.2) :

(i) q, p என்பன மிகை எண்கள் ஆதலால் வரைபடத்தில் அளிப்பு சார்பானது முதல் கால் பகுதியில் மட்டும் இடம் பெற்றுள்ளது.

(ii) அளிப்பு சார்பின் சா−வு ஒரு மிகை எண்.

3.1.3 *செலவுச் சார்பு* (Cost function)

பொதுவாக மொத்த செலவு இரண்டு பிரிவுகளாகும்.

(i) மாறும் செலவு (ii) மாறாச் செலவு. மாறும் செலவு உற்பத்தியின் ஒரு மதிப்புச் சார்பாக இருக்கும். ஆனால் மாறாச் செலவு உற்பத்தியைச் சாராமல் இருக்கும்.

$f(x)$ என்பதை மாறும் செலவு, k என்பதை மாறாச் செலவு என்க. x என்பது உற்பத்தியின் அலகு எனில் மொத்த செலவுச் சார்பானது $C(x) = f(x) + k$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கு x என்பது மிகை எண்ணாகும்.

$f(x)$ எனும் சார்பிற்கு மாறிலி உறுப்பு கிடையாது என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

நாம் சராசரி செலவு (Average Cost), சராசரி மாறும் செலவு (Average Variable Cost), சராசரி மாறாச்செலவு (Average Fixed Cost), இறுதி நிலைச் செலவு (Marginal Cost) மற்றும் இறுதிநிலைச் சராசரி செலவு (Marginal Average Cost) இவைகளை வரையறுப்போம்.

(i) சராசரி செலவு (AC) $= \dfrac{f(x)+k}{x} = \dfrac{\text{மொத்தச் செலவு}}{\text{உற்பத்தி}}$

(ii) சராசரி மாறும் செலவு (AVC) $= \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\text{மாறும் செலவு}}{\text{உற்பத்தி}}$

(iii) சராசரி மாறாச் செலவு (AFC) $= \dfrac{k}{x} = \dfrac{\text{மாறாச்செலவு}}{\text{உற்பத்தி}}$

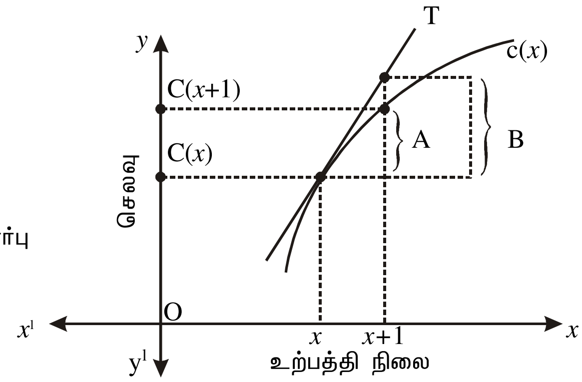
(iv) இறுதி நிலைச் செலவு (MC) $= \dfrac{d}{dx}\,C(x) = C'(x)$

(v) இறுதி நிலைச் சராசரி செலவு (MAC) $= \dfrac{d}{dx}$ (AC)

குறிப்பு

$C(x)$ என்பது ஒரு பொருளை x அலகுகள் உற்பத்தி செ–ய ஆகும் மொத்தச் செலவு எனில், $C'(x)$ என்பது இறுதி நிலைச் செலவு ஆகும். அதாவது உற்பத்தியின் அளவு x அலகுகள் இருக்கும்பொழுது மேலும் ஓர் அலகு உற்பத்தி செ–ய ஆகும் தோராயமான செலவே இறுதி நிலைச் செலவாகும். இது படம் 3.3-ல் விளக்கப்பட்டுள்ளது.

$A = C(x+1) - C(x)$
$B = C'(x)$
= இறுதி நிலைச் சார்பு



படம் 3.3

3.1.4 வருவா-ச் சார்பு (Revenue function)

x அலகுகள் ரூ. p வீதம் விற்கப்படுகின்றன என்க. மொத்த வருவா– சார்பானது $R(x) = px$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கு p, x என்பன மிகை எண்கள்.

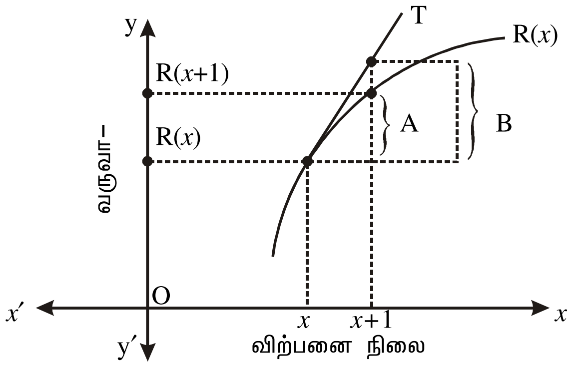
$$\text{சராசரி வருவா– (AR)} = \frac{\text{மொத்த வருவாய்}}{\text{விற்பனை அளவு}} = \frac{px}{x} = p.$$

(அதாவது சராசரி வருவாயும், விலையும் சமமாக உள்ளன.)

$$\text{இறுதி நிலை வருவா– (MR)} = \frac{d}{dx}(R) = R'(x)$$

குறிப்பு

உற்பத்தி செ–யப்பட்டு, விற்கப்பட்ட x அலகுகளிலிருந்து கிடைக்கும் மொத்த வருவா– $R(x)$ என்க. விற்கும் அளவு x அலகுகள் இருக்கும்பொழுது மேலும் ஓர் அலகு உற்பத்தி செ–யப்பட்டு விற்கப்பட்டதால் கிடைக்கும் தோராயமான வருவாயானது, இறுதி நிலை வருவா– $R'(x)$ ஆகும். இது படம் 3.4-ல் விளக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 3.4

$A = R(x+1) - R(x)$

$B = R'(x)$ = இறுதி நிலை வருவா–

3.1.5 இலாபச் சார்பு (Profit function)

மொத்த வருவா–, மொத்த செலவு இவைகளின் வித்தியாசம் இலாபச் சார்பாகும். அதாவது, இலாபச் சார்பு $P(x) = R(x) - C(x)$ ஆகும்.

3.1.6 நெகிழ்ச்சி (Elasticity)

x-ஐ பொறுத்து, $y = f(x)$ என்ற சார்பின் நெகிழ்ச்சி

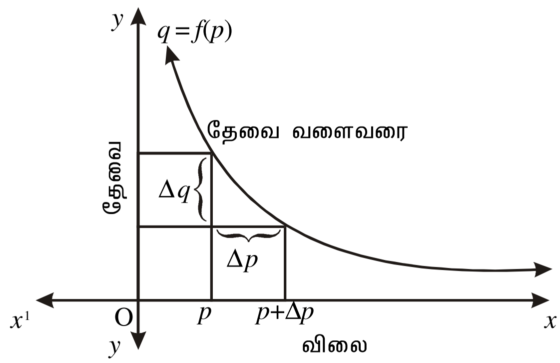
$$\eta = \frac{Ey}{Ex} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

x ஐ பொறுத்து y-ன் நெகிழ்ச்சியானது, $\Delta x \to 0$ எனும்பொழுது y-ன் ஒப்ப மாறும் வீதம் x-இன் ஒப்ப மாறும் வீதத்திற்கு உள்ள விகிதத்தின் எல்லையே ஆகும். (η ஒரு மிகை எண்).

3.1.7 தேவை நெகிழ்ச்சி (Elasticity of demand)

$q = f(p)$ என்பது தேவைச் சார்பு என்க. q என்பது தேவை, p என்பது விலை எனில், தேவை நெகிழ்ச்சி

$$\eta_d = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$$ ஆகும் (படம் 3.5).



படம் 3.5

$$\text{தேவை நெகிழ்ச்சி} = \underset{\Delta p \to 0}{\text{Lt}} \frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$$

தேவை வளைவரையின் சாய்வு குறை எண் மற்றும் நெகிழ்வு ஒரு மிகை ஆகையால் தேவையின் நெகிழ்ச்சியானது

$$\eta_d = -\frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$$ ஆகும்.

3.1.8. ***அளிப்பு நெகிழ்ச்சி*** **(Elasticity of supply)**

$x = f(p)$ என்பது அளிப்புச் சார்பு என்க. இங்கு x என்பது தேவை, p என்பது விலையாகும். அளிப்பு நெகிழ்ச்சியானது

$\eta_s = \frac{p}{x} \frac{dx}{dp}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

3.1.9 ***சமன் நிலை விலை*** **(Equilibrium price)**

தேவையின் அளவும், அளிப்பின் அளவும் சமமாக இருக்கும் நிலையில் உள்ள விலையைச் சமன் நிலை என்று கூறுகிறோம்.

3.1.10 ***சமன் நிலை அளவு*** **(Equilibrium quantity)**

சமன் நிலை விலையை, தேவை சார்பு அல்லது அளிப்பு சார்பில் பிரதியிட கிடைப்பது சமன் நிலை அளவாகும்.

3.1.11 இறுதி நிலை வருவா-க்கும் தேவையின் நெகிழ்ச்சிக்கும் உள்ள தொடர்பு

விலை p ஆக இருக்கும்பொழுது q அலகுகள் தேவைப் படுகின்றன என்க. $\therefore\ p = f(q)$ (f- ஆனது வகையிடத்தக்கதாக இருக்க வேண்டும்)

வருவாயானது $R(q) = qp = q\,f(q) \qquad [\,p = f(q)]$

q ஐ பொறுத்து $R(q)$-வை வகையிட கிடைப்பது இறுதி நிலை வருவாயாகும்.

$$\therefore \quad R'(q) = q\,f'(q) + f(q) = q\frac{dp}{dq} + p \qquad [\frac{dp}{dq} = f'(q)]$$

$$R'(q) = p(1 + \frac{q}{p}\ \frac{dp}{dq}) = p\left[1 + \frac{1}{\frac{p}{q}\frac{dq}{dp}}\right]$$

$$= p\left[1 + \left\{\frac{-1}{-\frac{p}{q}\frac{dq}{dp}}\right\}\right]$$

இறுதி நிலை வருவா– $= R'(q) = p\left[1 - \frac{1}{\eta_d}\right] \qquad [\,\eta_d = -\frac{p}{q}\ \frac{dq}{dp}\ ]$

எடுத்துக்காட்டு 1

ஒரு நிறுவனம் x டன்கள் உற்பத்தி செ-யும்பொழுது அதன் மொத்தச் செலவு சார்பு $C(x) = \frac{1}{10}x^3 - 4x^2 + 20x + 5$ எனில் (i) சராசரி செலவு (ii) சராசரி மாறும் செலவு (iii) சராசரி மாறாச் செலவு (iv) இறுதி நிலைச் செலவு (v) இறுதிநிலைச் சராசரி செலவு என்பனறவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

$$C(x) = \frac{1}{10}x^3 - 4x^2 + 20x + 5$$

(i) சராசரி செலவு $= \dfrac{\text{மொத்தச் செலவு}}{\text{உற்பத்தி}}$

$$= \left(\frac{1}{10}x^2 - 4x + 20 + \frac{5}{x}\right)$$

(ii) சராசரி மாறும் செலவு $= \dfrac{\text{மாறும் செலவு}}{\text{உற்பத்தி}}$

$$= \frac{1}{10}x^2 - 4x + 20$$

(iii) சராசரி மாறாச் செலவு $= \dfrac{\text{மாறாச்செலவு}}{\text{உற்பத்தி}} = \dfrac{5}{x}$

(iv) இறுதி நிலைச் செலவு $= \dfrac{d}{dx}C(x)$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{10}x^3 - 4x^2 + 20x + 5\right)$$

$$= \left(\frac{3}{10}x^2 - 8x + 20\right)$$

(v) இறுதி நிலை சராசரிச் செலவு $= \dfrac{d}{dx}(AC)$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{10}x^2 - 4x + 20 + \frac{5}{x}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{5}x - 4 - \frac{5}{x^2}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 2

***x* அலகுகள் உற்பத்திக்கான மொத்த செலவு $C = 0.00005x^3 - 0.06x^2 + 10x + 20000$ எனில், 1000 அலகுகள் உற்பத்திக்கான இறுதிநிலைச் செலவைக் காண்க.**

தீர்வு :

$$C = 0.00005x^3 - 0.06x^2 + 10x + 20000$$

இறுதி நிலைச் செலவு $= (0.00005)(3x^2) - (0.06)\,2x + 10$

$$= 0.00015\,x^2 - 0.12x + 10$$

$x = 1000$ அலகுகள் எனில்,

$$\frac{dC}{dx} = (0.00015)(1000)^2 - (0.12)(1000) + 10$$

$$= 150 - 120 + 10 = 40$$

= 1000 அலகுகள் உற்பத்திக்கு இறுதி நிலைச் செலவு ரூ. 40.

எடுத்துக்காட்டு 3

$x = 100 - p - p^2$ என்ற சார்பின் $p = 5$-ல் தேவை நெகிழ்ச்சியைக் காண்க.

தீர்வு : $\frac{55}{70}$ $\frac{p+2p^2}{100-p-p^2}$

$$x = 100 - p - p^2$$

$$\frac{dx}{dp} = -1 - 2p.$$

தேவை நெகிழ்ச்சி $\eta_d = -\frac{p}{x}\frac{dx}{dp}$

$$= -\frac{p(-1-2p)}{100-p-p^2} =$$

$p = 5$ எனில், $\eta_d = \frac{5+50}{100-5-25} = \quad = \frac{11}{14}$

எடுத்துக்காட்டு 4

$x = 2p^2+8p+10$ என்ற அளிப்புச் சார்பின் அளிப்பு நெகிழ்ச்சியைக் காண்க.

தீர்வு :

$$x = 2p^2+8p+10 \Rightarrow \frac{dx}{dp} = 4p+8$$

அளிப்பு நெகிழ்ச்சி $\eta_s = \frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = \frac{4p^2+8p}{2p^2+8p+10} = \frac{2p^2+4p}{p^2+4p+5}$

எடுத்துக்காட்டு 5

$y = 4x$-8 என்ற சார்பின் நெகிழ்ச்சியைக் காண்க. மேலும் $x = 6$ ஆக இருக்கும்பொழுது அதன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$y = 4x-8 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4$$

நெகிழ்ச்சி $\eta = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} \Rightarrow \eta = \frac{x}{4x-8}(4) = \frac{x}{x-2}$

$x = 6$ எனில் $\eta = \frac{6}{6-2} = \frac{3}{2}$

எடுத்துக்காட்டு 6

$y = \frac{1-2x}{2+3x}$ எனில், [illegible] η −ன் மதிப்பை $x = 0$ மேலும் $x = 2$ எனும் [illegible] காண்க.

தீர்வு :

$$y = \frac{1-2x}{2+3x}$$

x ஐ பொறுத்து வகையிட

$$= \frac{(2+3x)(-2)-(1-2x)(3)}{(2+3x)^2} = \qquad =$$

$$\eta = \qquad = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x(2+3x)}{(1-2x)} \times$$

$$\eta =$$

$x = 0$ எனில், $\eta = 0$; $x = 2$ எனில், $\eta =$

எடுத்துக்காட்டு 7

$xp^n = k$, என்ற தேவைச் சார்பில் n மற்றும் k மாறிலிகள் எனில், விலையின் தேவை நெகிழ்ச்சியைக் காண்க.

தீர்வு :

$xp^n = k$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது) $\Rightarrow \quad x = k\,p^{-n}$

$$\frac{dx}{dp} = -\,nk\,p^{-n-1}$$

தேவை நெகிழ்ச்சி $\eta_d \quad = -\frac{p}{x}\,\frac{dx}{dp} \;= -\frac{p}{kp^{-n}}\;(-nk\,p^{-n-1})$

$= n,$ ஓர் மாறிலி

எடுத்துக்காட்டு 8

$xy^2 = c$ (c, மாறிலி) எனும் வளைவரையில் தேவை நெகிழ்ச்சி எல்லா புள்ளிகளிலும் 2 என்ற எண்ணாக இருக்கும் என நிறுவுக. இங்கு y என்பது விலையைக் குறிக்கிறது.

தீர்வு :

$xy^2 = c$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$x = \frac{c}{y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{2c}{y^3}$$

தேவை நெகிழ்ச்சி $\eta_d = -\frac{y}{x}\,\frac{dx}{dy} \;=\; \frac{-\,y}{\frac{c}{y^2}}\left(\frac{-2c}{y^3}\right) = 2$

எடுத்துக்காட்டு 9

ஒரு முற்றுரிமையாளரின் தேவைச் சார்பு $x = 100-4p$ எனில்,

(i) மொத்த வருவா-, சராசரி வருவா- மற்றும் இறுதிநிலை வருவா- ஆகியனவற்றைக் காண்க.

(ii) x-ன் எம்மதிப்பிற்கு இறுதிநிலை வருவா- பூச்சியத்திற்கு சமமாகும்?

தீர்வு :

$$x = 100-4p \quad \Rightarrow \quad p = \frac{100-x}{4}$$

மொத்த வருவாய் $\quad R = px$

$$= \left(\frac{100-x}{4}\right)x = \frac{100x-x^2}{4}$$

சராசரி வருவாய் $= p = \dfrac{100-x}{4}$

இறுதி நிலை வருவாய் $= \dfrac{d}{dx}(R) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{100x-x^2}{4}\right)$

$$= \frac{1}{4}\,[100-2x] = \frac{50-x}{2}$$

(ii) இறுதிநிலை வருவாய் பூச்சியம் எனில்,

$$= 0 \;\Rightarrow\; x = 50 \text{ அலகுகள்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 10

எந்த ஒரு உற்பத்தி நிலையிலும் AR மற்றும் MR என்பன சராசரி வருவாய் மற்றும் இறுதிநிலை வருவாயைக் குறித்தால், தேவை நெகிழ்ச்சியானது $\dfrac{AR}{AR-MR}$ -க்குச் சமம் என நிறுவுக. இதை $p = a + bx$ என்ற தேவை கோடு விதிக்கு சரிபார்க்க.

தீர்வு :

மொத்த வருவாய் $R = px$; சராசரி வருவாய் $AR = p$

இறுதி நிலை வருவாய் $MR = \dfrac{d}{dx}(R) = \dfrac{d}{dx}(px) = p + x\dfrac{dp}{dx}$

இப்பொழுது $\dfrac{AR}{(AR-MR)} = \dfrac{p}{p-(p+x\frac{dp}{dx})} = -\dfrac{p}{x}\,\dfrac{dx}{dp}$

$$= \text{தேவை நெகிழ்ச்சி } \eta_d$$

$$\therefore \frac{AR}{(AR-MR)} = \eta_d$$

$p = a + bx$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது) $\therefore \quad \frac{dp}{dx} = b$

$R \;\; = px = ax + bx^2$

$AR = a+bx \qquad\qquad (AR = \text{விலை})$

$MR = \frac{d}{dx}(ax + bx^2) = a + 2bx.$

$$\therefore \quad \frac{AR}{(AR-MR)} = \frac{a+bx}{a+bx-a-2bx} = -\frac{(a+bx)}{bx} \text{ -----(1)}$$

$$\eta_d = -\frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = -\frac{(a+bx)}{x}\frac{1}{b} = -\frac{(a+bx)}{bx} \text{ ---------(2)}$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து $\frac{AR}{(AR-MR)} = \eta_d$ என அறிய முடிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 11

கீழ்வரும் தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்புகளின் சமன்நிலை விலையையும் சமன்நிலை தேவையையும் காண்க. $Q_d = 4 - 0.06p$ மேலும் $Q_s = 0.6 + 0.11p$

தீர்வு :

சமன் நிலை விலையில்,

$Q_d = Q_s \Rightarrow 4\text{-}0.06p = 0.6 + 0.11p \Rightarrow 0.17p = 3.4$

$\Rightarrow \quad p = \frac{3.4}{0.17} \Rightarrow p = 20$

$p = 20$ எனில், $Q_d = 4 - (0.06)(20) = 4 - 1.2 = 2.8$

$\therefore$ சமன்நிலை விலை $= 20$ மற்றும்

சமன்நிலை தேவை $= 2.8$ அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 12

ஒரு பொருளின் தேவைச் சார்பு $q = \frac{p}{p-5}$ $(p>5)$, p என்பது ஓர் அலகு பொருளின் விலை என்க. $p = 7$ எனில், தேவை நெகிழ்ச்சியைக் காண்க. விடைக்கு விளக்கம் கூறுக.

தீர்வு :

தேவைச் சார்பு $q = \frac{p}{p-5}$

p-ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dq}{dp} = \frac{(p-5)(1) - p(1)}{(p-5)^2} = \frac{-5}{(p-5)^2}$$

தேவை நெகிழ்ச்சி $\eta_d = -\frac{p}{q}\frac{dq}{dp} = \frac{-p(p-5)}{p}\left\{-\frac{5}{(p-5)^2}\right\} =$

$p = 7$ எனில் $\eta_d = \frac{5}{7-5} = 2.5$

அதாவது $p = 7$ எனில் விலையானது 1% அதிகரித்தால், தேவையின் அளவு தோராயமாக 2.5% குறைகிறது. அவ்வாறே $p = 7$ எனில் விலையானது 1% குறைந்தால், தேவையின் அளவு தோராயமாக 2.5% அதிகரிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 13

ஒரு பொருளின் தேவை $q = -60p + 480$, $(0 < p < 7)$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு p என்பது விலையைக் குறிக்கிறது. $p = 6$ -ஆக இருக்கும்பொழுது தேவை நெகிழ்ச்சி மற்றும் இறுதி நிலை வருவா- ஆகியனவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

தேவைச் சார்பு $q = -60p + 480$

p-ஐ பொறுத்து வகையிட, $\frac{dq}{dp} = -60$

தேவை நெகிழ்ச்சி $\eta_d = -\frac{p}{q}\frac{dq}{dp} = \frac{-p}{-60p+480}(-60) = -\frac{p}{p-8}$

$p = 6$ எனில், $\eta_d = \frac{-6}{6-8} = 3$

இறுதி நிலை வருவா− $= p\left(1-\frac{1}{\eta_d}\right) = 6\left(1-\frac{1}{3}\right) = 4$

$\therefore$ இறுதி நிலை வருவா− = ரூ. 4

பயிற்சி 3.1

1) x-டன்கள் உற்பத்தி செ−ய ஒரு நிறுவனத்தின் மொத்த உற்பத்தி செலவு $C(x)$ = ரூ. $(\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 25x + 8)$ எனில் (i) சராசரி செலவு,

(ii) சராசரி மாறும் செலவு (iii) சராசரி மாறாச் செலவு ஆகியவைகளைக் காண்க. மேலும் உற்பத்தி நிலை 10 டன்களாக இருக்கும்பொழுது இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

2) x -அலகுகள் உற்பத்திக்கான மொத்த செலவு

$C(x) = 25 + 3x^2 + \sqrt{x}$ எனில் 100 அலகுகளின் உற்பத்திக்கான இறுதி நிலைச் செலவினைக் காண்க.

3) x -அலகுகள் உற்பத்திக்கான மொத்த செலவு $C(x) = 50+5x+2\sqrt{x}$ எனில், 100 அலகுகள் உற்பத்திக்கான இறுதி நிலைச் செலவு யாது?

4) x அலகுகள் உற்பத்திக்கான செலவு $C = \frac{1}{2}x + 26\sqrt{x+4}$ எனில், 96 அலகுகளின் உற்பத்திக்கான இறுதி நிலைச் செலவினைக் காண்க.

5) x டன்கள் உற்பத்தி செ–யும்பொழுது உற்பத்திக்கான செலவு $C = 10 + 30\sqrt{x}$ எனில் 100 டன்கள் உற்பத்திக்கான இறுதிநிலைச் செலவைக் காண்க. மேலும் ஒரு டன்னுக்கு ரூ. 0.40 என இறுதி நிலை செலவு இருக்கும்பொழுது அதன் உற்பத்தியைக் காண்க.

6) x -அலகுகள் உற்பத்திக்கான செலவுச் சார்பு

$C = \frac{1}{10}x^3 - 4x^2 + 8x + 4$ எனில் (i) சராசரி செலவு (ii) இறுதி நிலைச் செலவு (iii) இறுதி நிலைச் சராசரி செலவு ஆகியனவற்றைக் காண்க.

7) x -அலகுகள் உற்பத்திக்கான மொத்த செலவு $C = 50 + 10x + 5x^2$ எனில் $x = 1.3$ என்ற புள்ளியில் சராசரி மற்றும் இறுதிநிலைச் செலவு ஆகியனவற்றைக் காண்க.

8) x அலகுகள் கொண்ட பொருளின் உற்பத்திக்கான மொத்தச் செலவு $C = 0.00004x^3 - 0.002x^2 + 3x + 10{,}000$ எனில் 1000 அலகுகள் உற்பத்திக்கான இறுதிநிலைச் செலவைக் காண்க.

9) $xy = c^2$ எனும் வளைவரையில் தேவை நெகிழ்ச்சி அனைத்து புள்ளிகளிலும் 1 என்ற எண்ணாக இருக்கும் என நிறுவுக. y என்பது விலையைக் குறிக்கிறது (c, மாறிலி).

10) தேவை விதி $q = \frac{20}{p+1}$, $p = 3$ எனில் தேவை நெகிழ்ச்சியைக் காண்க. விடைக்கு விளக்கம் தருக.

11) தேவைச் சார்பு $q = 165 - 3p - 2p^2$ என இருப்பின் விலை $p = 5$ எனில் தேவை நெகிழ்ச்சியைக் காண்க. விடைக்கு விளக்கம் தருக.

12) q-ன் எம்மதிப்பிற்கும், தேவைச் சார்பு $p = \frac{100}{q}$ இன் நெகிழ்ச்சியானது ஒன்று என்ற எண்ணாக இருக்கும் என நிறுவுக.

13) கீழ்வரும் தேவைச் சார்புகளின் தேவை நெகிழ்ச்சியை அதன் விலையைப் பொறுத்து காண்க.

(i) $p = \sqrt{a - bx}$, a மற்றும் b என்பன மாறிலிகள் (ii) $x = \frac{8}{p^{3/2}}$

14) தேவை வளைவரை $xp^m = b$. m , b முறையே மாறிலிகள் எனில், விலையின் தேவை நெகிழ்ச்சியைக் காண்க.

15) அளிப்புச் சார்பு $x = 2p^2 + 5$ எனில் அளிப்பு நெகிழ்ச்சியைக் காண்க.

16) ஒரு குறிப்பிட்ட உருப்படிகளின் அளிப்புச் சார்பானது $x = a\sqrt{p - b}$, p என்பது விலை. a, b என்பன மிகை மாறிலிகள் $(p>b)$ எனில், அளிப்பு நெகிழ்ச்சி η_s-யைக் காண்க. விலையானது $2b$ ஆக இருக்கும் பொழுது அளிப்பு நெகிழ்ச்சி ஒன்று என்ற எண்ணாகும் என நிறுவுக.

17) தேவைச் சார்பு $p = 550 - 3x - 6x^2$ இங்கு x ஆனது தேவையின் அளவையும், p –ஆனது ஓர் அலகின் விலையையும் குறிக்கிறது. சராசரி வருவா– மற்றும் இறுதி நிலை வருவா– இவைகளைக் காண்க.

18) S என்பது ஒரு பொருளின் விற்பனையையும்; x அதன் விலையையும் குறிக்கிறது. $S = 20000\, e^{-0.6x}$ எனில்,

(i) மொத்த விற்பனை வருவா– $(R = xS)$

(ii) இறுதிநிலை வருவா–, இவைகளைக் காண்க.

19) ஒரு பொருளின் தேவை x மற்றும் அதன் விலை p இவைகளை இணைக்கும் சமன்பாடு $x = 30 - 4p - p^2$. தேவை நெகிழ்ச்சி மற்றும் இறுதி நிலை வருவா– இவைகளைக் காண்க.

20) கீழ்வரும் தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்புகளின் சமன்நிலை விலையையும், சமன்நிலை தேவையையும் காண்க.

$q_d = 4 - 0.05p$, $q_s = 0.8 + 0.11p$

21) வருவா–ச் சார்பு $R(x) = 100x + \frac{x^2}{2}$ -க்கு $x = 10$-இல் இறுதி நிலை வருவாயைக் காண்க.

22) ஒரு பொருளின் தேவை q மற்றும் விலை இவைகளை இணைக்கும் சமன்பாடு $q = 32 - 4p - p^2$ எனில், $p = 3$ -இல் தேவை நெகிழ்ச்சி மற்றும் இறுதி நிலை வருவா– இவைகளைக் காண்க.

3.2 வகையீடு-மாறுவீதம்

$y = f(x)$ என்ற சார்பு, x மற்றும் y என்ற இரண்டு மாறிகள் வாயிலாக உள்ளது என்க. x-இல் சிறு மாற்றம் Δx எனும்பொழுது, y-ல் சிறு மாற்றம் Δy என்க.

x-ஐப் பொறுத்து y-இன் சராசரி மாறுவீதமானது $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கு $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ மேலும்

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \quad .$$

$\frac{dy}{dx}$ ஆனது, x ஐ பொறுத்து y -ல் எற்படக் கூடிய உடனடி மாறுவீதம் என வரையறுக்கப்படுகிறது.

3.2.1 ஒரு அளவின் மாறு வீதம்

x மற்றும் y என்ற இரண்டு அளவுகள் $y = f(x)$ என்ற உறவு முறைப்படி இணைக்கப்பட்டுள்ளன என்க. $f'(x_0)$ என்பது x-ஐ பொறுத்து $x = x_0$-இல் y-இன் மாறு வீதமாகும் என்பதைக் குறிக்கிறது.

3.2.2 தொடர்புள்ள மாறுவீதங்கள்

இண்டு அல்லது அதற்கு மேல் t-ன் மாறிகளில் உள்ள உள்ளார்ந்த (implicit) சார்புகளைக் கொண்ட சமன்பாடுகளின் மூலம் கணக்குகளின் தீர்வுகளைக் காண்போம். $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ வழக்கமாக இந்த மாறிகள் நேரத்தின் உறுப்புகளாக வெளிப்படைச் சார்புகளாக வரையறுக்கப் படுவதில்லை. ஆகவே நாம் உள்ளார்ந்த சார்புகளை நேரம் 't'-ஐ பொறுத்து வகையிட்டு நேரம்–மாறு வீதம் இவைகளைத் தொடர்புபடுத்தி தீர்மானிக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 14

$y = \frac{300}{x}$ -இல் x-ஐ பொறுத்து, x-ஆனது 10-லிருந்து 10.5-க்கு கூடும்பொழுது y-ன் சராசரி மாறுவீதம் காண்க. மேலும் $x = 10$-இல் y-ன் உடனடி மாறுவீதம் யாது?

தீர்வு :

(i) x-ஐ பொறுத்து y-ன் சராசரி மாறு வீதமானது $x = x_0$-இல்

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

இங்கு $f(x) = \frac{300}{x}$, $x = 10$, $\Delta x = 0.5$

$x = 10$-இல் y-இன் சராசரி மாறு வீதம்

$$\frac{f(10.5)-f(10)}{0.5} = \frac{28.57-30}{0.5} = \frac{-1.43}{0.5}$$

$= -\ 2.86$ அலகுகள் / x-ன் ஓர் அலகு மாற்றம்

இங்கு குறை குறியானது x கூடும்பொழுது y-ஒவ்வொரு அலகுக்கும் குறைகிறது என்பதை உணர்த்துகிறது.

(ii) y-இன் உடனடி மாற்றமானது $\frac{dy}{dx}$

$$y = \frac{300}{x}$$

$$\therefore \ \frac{dy}{dx} = \frac{-300}{x^2}$$

$x = 10$ -இல், $= \frac{-300}{(10)^2} = -3$

$\Rightarrow$ $x = 10$-இல் உடனடி மாற்றமானது -3 அலகுகள். குறைகுறியானது x-இன் மாற்று வீதத்தைப் பொறுத்து, y குறைகிறது என்பதை உணர்த்துகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 15

$\frac{dy}{dx}$

$xy = 35$ எனும் வளைவரையில் ஒரு புள்ளியானது நகருகிறது. புள்ளி $(5, 7)$-இல் x-ஆயத் தொலைவானது 3 அலகுகள்/வினாடி என்ற வீதத்தில் கூடுகிறது எனில் அந்நிலையில் y-ஆயத் தொலைவு மாறும் வீதத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

$x\,y = 35$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

இங்கு x, y-கள் t-ல் உள்ள சார்புகளாகும்.

't' -ஐ பொறுத்து வகையிட

$$(xy) = \frac{d}{dt}(35) \ \Rightarrow \ x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{y}{x}\,\frac{dx}{dt}$$

$x = 5, y = 7$ மற்றும் $\frac{dx}{dt} = 3$ எனும்பொழுது,

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{7}{5} \times 3 = -4.2 \text{ அலகுகள் / வினாடி.}$$

அதாவது y -ஆயத் தொலைவானது 4.2 அலகுகள் / வினாடி வீதம் குறைகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 16

ஒரு பொருளின் ஓர் அலகு விலையையும், அலகுகளின் விற்பனை எண்ணிக்கை x யையும் தொடர்புபடுத்தும் தேவைச் சார்பு $p = 400 - \frac{x}{1000}$. இந்த பொருளின் x அலகுகள் உற்பத்தி செ-ய ஆகும் செலவு $C(x) = 50x + 16000$. உற்பத்தி செ-யப்பட்ட அலகுகள் விற்கப்பட்டன. x-ஆனது வாரத்திற்கு 200 அலகுகள் வீதம் கூடுகின்றன. 10000 எண்ணிக்கைக் கொண்ட அலகுகள் உற்பத்தி செ-யப்பட்டு விற்கப்படும்பொழுது காலம் t-ஐ (வாரங்களில்) பொறுத்து (i) வருவா- (ii) செலவு (iii) இலாபம், இவற்றில் ஏற்படும் உடனடி மாற்றங்களைக் காண்க.

தீர்வு :

(i) வருவா− $R = px = (400 - \frac{x}{1000})x$

$$= 400x - \frac{x^2}{1000}$$

$$\frac{d}{dt}(R) = \frac{d}{dt}(400x) - \frac{d}{dt}\left(\frac{x^2}{1000}\right)$$

$$\frac{dR}{dt} = (400 - \frac{x}{500})\frac{dx}{dt}$$

$x = 10000$, $\frac{dx}{dt} = 200$ எனில்

$$\frac{dR}{dt} = (400 - \frac{10000}{500})(200)$$

$$= \text{ரூ. } 76,000 \text{ / வாரம்}$$

வருவா− வாரத்திற்கு ரூ. 76000 வீதம் அதிகரிக்கிறது.

(ii) $C(x) = 50x + 16000.$

$$\frac{d}{dt}(C) = \frac{d}{dt}(50x) + \frac{d}{dt}(16000)$$

$$= 50\frac{dx}{dt} + 0 = 50\frac{dx}{dt}$$

$\frac{dx}{dt} = 200$ எனில், $\frac{dC}{dt} = 50 \times 200$

= ரூ.10,000 / வாரம்

செலவு வாரத்திற்கு ரூ. 10,000 வீதம் அதிகரிக்கிறது.

(iii) இலாபம் $P = R - C$

$$\therefore \frac{dP}{dt} = \frac{dR}{dt} - \frac{dC}{dt} = 76{,}000 - 10{,}000$$

= ரூ. 66,000 / வாரம்

(அ–து) இலாபமானது வாரத்திற்கு ரூ. 66,000 வீதம் அதிகரிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 17

ஒரு வட்டத்தின் சுற்றளவானது மாறா வீதத்தில் கூடுகிறது. அதன் பரப்பளவு கூடும் வீதமானது அதன் ஆரத்திற்கு நேர் விகிதத்தில் இருக்கும் என நிறுவுக.

தீர்வு :

r அலகு ஆரமுள்ள ஒரு வட்டத்தின் சுற்றளவு P மற்றும் பரப்பளவு A என்க.

$P = 2\pi r$ மற்றும் $A = \pi r^2$

$$\therefore \frac{dP}{dt} = 2\pi\frac{dr}{dt} \qquad \text{----------(1)}$$

$$\therefore \frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt} \qquad \text{----------(2)}$$

(1) மற்றும் (2)-ஐ பயன்படுத்த, $\frac{dA}{dt} = r\frac{dP}{dt}$

சுற்றளவு P ஆனது மாறா வீதத்தில் கூடுவதால் $\frac{dP}{dt}$ ஓர் மாறிலி.

$\therefore \frac{dA}{dt} \propto r$ (அ–து) A இன் கூடும் வீதமானது அதன் ஆரத்தின் நேர் விகிதத்தைப் பொறுத்துள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 18

ஓர் உலோக உருளையை வெப்பப்படுத்தும் பொழுது, ஆரம் (அதன் வடிவம் மாறாமல்) 0.4 செமீ/நிமிடம் மற்றும் அதன் உயரம் 0.3 செமீ/நிமிடம் எனும் வீதத்தில் கூடுகின்றன. எனில், ஆரம் 20 செமீ, உயரம் 40 செமீ என இருக்கும் பொழுது அதன் வளைபரப்பில் ஏற்படும் மாறுவீதம் யாது?

தீர்வு :

உருளையின் வளைபரப்பு

$A = 2\pi rh.$

't'-ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi\left[r\frac{dh}{dt} + h\frac{dr}{dt}\right]$$

$$r = 20\ ,\quad h = 40\ ,\quad \frac{dr}{dt} = 0.4\ ,\quad \frac{dh}{dt} = 0.3 \text{ எனில்}$$

$$\therefore \quad \frac{dA}{dt} = 2\pi\ [20 \times 0.30 + 40 \times 0.40]$$

$$= 2\pi[6 + 16] = 44\pi \text{ செமீ}^2 \text{ / நிமிடம்}$$

எடுத்துக்காட்டு 19

x-இன் எம்மதிப்புகளுக்கு, $y = x^3 + 21$ எனும் சார்பில் x, அதிகரிக்கும்பொழுது y ஆனது அதைபோல் 75 மடங்கு அதிகரிக்கும்?

தீர்வு :

$y = x^3 + 21$

't'ஐ பொறுத்து வகையிட

$$\frac{dy}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt} + 0 = 3x^2\frac{dx}{dt}$$

மேலும் $\frac{dy}{dt} = 75\frac{dx}{dt}$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

$$\therefore\ 3x^2\frac{dx}{dt} = 75\frac{dx}{dt} \Rightarrow 3x^2 = 75$$

$$\Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5.$$

எடுத்துக்காட்டு 20

ஒரு பொருளின் தேவை $y = \frac{12}{x}$, (இங்கு x ஆனது விலை) விலை ரூ. 4 என இருக்கும்பொழுது தேவை மாறு வீதம் யாது?

தீர்வு :

விலையைப் பொறுத்து, தேவை y-ன் மாறு வீதம் = $\frac{dy}{dx}$.

$y = \frac{12}{x}$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

$\therefore$ x-ஐ பொறுத்து, தேவையின் மாறு வீதமானது $\frac{dy}{dx} = -\frac{12}{x^2}$

விலை ரூ. 4 எனில், தேவையின் மாறு வீதம் =–

(அ–து) விலை ரூ. 4-ஆக இருக்கும்பொழுது, விலையில் 1%-ஐ கூட்டும்பொழுது தேவை 0.75% ஆக குறைகிறது.

பயிற்சி 3.2

1) $y = \frac{500}{x}$ -இல் x -ஐ பொறுத்து x ஆனது 20 லிருந்து 20.5 -க்கு கூடும்பொழுது, y-ன் சராசரி மாறு வீதம் காண்க. மேலும் $x = 20$-ல் y-ன் உடனடி மாறு வீதம் யாது?

2) $xy = 8$ என்ற வளைவரையில் 312 416 ஒரு புள்ளி நகரும்பொழுது, 2 அலகு / வினாடி எனும் வீதத்தில் y - ஆயத் தொலைவு கூடுகிறது. அந்நிலையில் x -ஆயத் தொலைவு மாறும் வீதத்தை புள்ளி (2, 4)-ல் காண்க.

3) $4x^2 + 2y^2 = 18$ எனும் வளைவரையில் ஒரு புள்ளியானது நகரும்பொழுது 3 அலகுகள் /வினாடி எனும் வீதத்தில் x-ஆயத் தொலைவு குறைகிறது. அந்நிலையில் y-ஆயத் தொலைவு மாறும் வீதத்தை புள்ளி (2,1)-இல் காண்க.

4) $y^2 = 12x$ எனும் வளைவரையில் ஒரு புள்ளி நகருகின்றது. அப்புள்ளி x-ஆயத் தொலைவானது $5\sqrt{2}$ அலகுகள் / வினாடி எனும் வீதத்தில் மாறுகிறது எனில் (3, 6)-இல் y-ஆயத் தொலைவின் மாறுவீதம், x- ஆயத் தொலைவின் மாறுவீதத்திற்கு சமம் எனக் காட்டுக.

5) வருவா–, செலவு மற்றும் இலாபச் சமன்பாடுகள் முறையே $R = 800x - \frac{x^2}{10}$, $C = 40x + 5{,}000$, $P = R - C$, இங்கு ஒவ்வொரு

மாதத்திலும் உற்பத்தி செ–யப்பட்ட x அலகுகள் விற்கப்படுகின்றன. உற்பத்தி, மாதத்திற்கு 100 அலகுகள் வீதம் கூடுகிறது. 2000 அலகுகள் உற்பத்திக்கு, (i) வருவா– (ii) செலவு (iii) இலாபம் ஆகியனவற்றின் மாதாந்திர மாறு வீதங்களைக் காண்க.

6) ஒரு பொருளின் ஓர் அலகு விலை p-யையும், அலகுகளின் விற்பனை எண்ணிக்கை x-யையும் தொடர்புபடுத்தும் தேவைச் சார்பு $p = 200 - \frac{x}{1000}$. இந்தப் பொருளை x அலகுகள் உற்பத்தி செ–ய ஆகும் செலவு $C = 40x + 12000$. உற்பத்தி செ–யப்பட்ட அலகுகள் விற்கப்பட்டன. x-ஆனது வாரத்திற்கு 300 அலகுகள் வீதம் கூடுகின்றது. 20000 எண்ணிக்கை கொண்ட அலகுகள் உற்பத்தி செ–யப்பட்டு விற்கப்படும்பொழுது காலம் 't' ஐ (வாரங்களில்) பொறுத்து உடனடி மாற்றத்தை (i) வருவா– (ii) செலவு (iii) இலாபம் ஆகியனவற்றைக் காண்க.

7) வகையிடுதலை மாறுவீத அளவாகப் பயன்படுத்தி கீழ்வரும் கூற்றை நிறுவுக. "ஒரு வட்டத்தின் பரப்பளவு சீராக கூடும்பொழுது அதன் சுற்றளவில் கூடும் மாற்றமானது வட்டத்தின் ஆரத்திற்கு எதிர்விகிதத்தில் இருக்கும்".

8) ஒரு வட்ட வடிவத் தட்டின் ஆரமானது 0.2 செமீ/விநாடி என்ற வீதத்தில் கூடுகிறது. அதன் ஆரமானது 25 செமீ இருக்கும்பொழுது பரப்பளவில் ஏற்படக்கூடிய மாறு வீதம் காண்க.

9) ஒரு உலோக உருளையை வெப்பப்படுத்தும்பொழுது (அதன் வடிவம் மாறாமல்) அதன் ஆரம் 0.2 செமீ /நிமிடம், உயரம் 0.15 செமீ/நிமிடம் எனும் வீதத்தில் கூடுகின்றன எனில், ஆரம் 10 செமீ, உயரம் 25 செமீ ஆக இருக்கும்பொழுது, அதன் கன அளவில் ஏற்படும் மாறு வீதத்தை கணக்கிடுக.

10) x இன் எம்மதிப்புகளுக்கு, x^3-5x^2+5x+8 இன் கூடும் வீதமானது x இன் கூடும் வீதத்தைப் போல் இருமடங்காகும்?

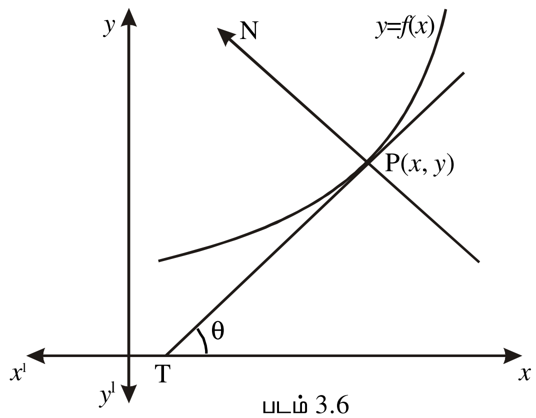
3.3 வகையிடுதலின் வாயிலாக சரிவை (சா-வை) அளவிடுதல்

3.3.1 தொடுகோட்டின் சா-வு

$\frac{dy}{dx}$ ஆனது, $y = f(x)$ என்ற வளைவரையில் (x, y)-இல் வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் சா–வு அல்லது சரிவு என்று வடிவ கணித விளக்கத்தின் மூலம் அறியலாம். x -அச்சின் மிகை திசையில்

தொடுகோட்டிற்கும், x-அச்சுக்கும் இடைப்பட்ட கோணம் θ எனில், தொடு கோட்டின் சா–வானது (படம் 3.6).

$$P(x, y)\text{-இல்},\ m = \tan\theta = \frac{dy}{dx} \text{ ஆகும்.}$$



படம் 3.6

குறிப்பு

(i) வளைவரையின் தொடுகோடானது x-அச்சுக்கு இணையாக இருந்தால் $\theta = 0$ ஆகும். அதாவது $\tan\theta = 0$ $\therefore$ அந்த புள்ளியில் $\frac{dy}{dx} = 0$ ஆகும்.

(ii) வளைவரையின் தொடுகோடானது y -அச்சுக்கு இணையாக இருந்தால் $\theta = 90^0$ ஆகும். அதாவது $\tan\theta = \infty$

$\therefore$ அந்தப் புள்ளியில் $\frac{dy}{dx} = \infty$ அல்லது $\frac{dx}{dy} = 0$ ஆகும்.

3.3.2 தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

பகுமுறை வடிவ கணிதத்தின் படி $y = f(x)$ என்ற வளைவரைக்கு $P(x_1, y_1)$ -இல் வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் சமன்பாடானது

$$y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1). \quad \text{இங்கு } \frac{dy}{dx} \text{ என்பது}$$

P-ல் வரையப்பட்ட தொடுகோடு கோட்டின் சா–வாகும்.

(அ–து) $\quad y - y_1 = m\,(x - x_1)$ இங்கு $m = \frac{dy}{dx}$

P-ஆனது தொடும்புள்ளி எனப்படும்.

குறிப்பு

$y = f(x)$ என்ற வளைவரைக்கு இரு தொடுகோடுகள்

(i) இணையாக இருக்குமானால் அதன் சா−வுகள் சமமாகும்.

(ii) ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருந்தால் அவற்றின் சா−வுகளின் பெருக்கல் பலன் -1 ஆக இருக்கும்.

3.3.3 செங்கோட்டின் சமன்பாடு

தொடும்புள்ளி $P(x, y)$-லிருந்து தொடுகோட்டிற்கு செங்குத்தாக வரையப்பட்ட கோடு செங்கோடாகும்.

∴ செங்கோட்டின் சமன்பாடு (x_1, y_1)-இல்

$$y - y_1 = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(x - x_1), \text{ இங்கு } \frac{dy}{dx} \neq 0$$

(அ−து) $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$ இங்கு m ஆனது,

புள்ளி (x_1, y_1)-ல் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் குறிக்கும்

எடுத்துக்காட்டு 21

$y = \frac{x^2 - 12}{x - 4}$ என்ற வளைவரைக்கு (0, 3)-இல் சா-வைக் காண்க. மேலும் எந்த புள்ளியில் தொடுகோடானது x-அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும் எனக் காண்க.

தீர்வு :

$$y = \frac{x^2 - 12}{x - 4}$$

x-ஐ பொறுத்து வகையிட

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-4)(2x)-(x^2-12)(1)}{(x-4)^2} = \frac{x^2 - 8x + 12}{(x-4)^2}$$

∴ (0, 3)-இல் வளைவரையின் சா−வு = $\frac{dy}{dx}$ (0, 3)-இல் $\frac{3}{4}$

தொடுகோடு x -அச்சுக்கு இணையாக உள்ளது.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$$

$\Rightarrow \quad (x-2)(x-6) = 0 \quad \therefore x = 2, 6$

$x = 2$ எனில் $y = 4$ மேலும் $x = 6$ எனில் $y = 12$

$\therefore$ (2, 4), (6, 12) எனும் புள்ளிகளிலிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள் x-அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 22

$y = lx^2 + 3x + m$ என்ற வளைவரையானது (0, 1) என்ற புள்ளி வழியாக செல்கிறது மேலும் $x = 0.75$-இல் அதன் தொடுகோடானது x-அச்சுக்கு இணையாக உள்ளது எனில் l, m இன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$y = l\,x^2 + 3x + m$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

x-ஐ பொறுத்து வகையிட

$$\frac{dy}{dx} = 2lx + 3.$$

$x = 0.75$-இல் $\frac{dy}{dx} = 2l\,(0.75) + 3$

$= 1.5l + 3.$

$x = 0.75$ இல் தொடுகோடு x-அச்சுக்கு இணையாக உள்ளது.

$\therefore \; x = 0.75$ இல் $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\Rightarrow \; 1.5l + 3 = 0 \;\Rightarrow\; l = -\frac{3}{1.5} = -2.$$

வளைவரையானது (0, 1)-ன் வழியாக செல்லுவதால், கிடைப்பது

$$1 = l(0)^2 + 3(0) + m \;\Rightarrow m = 1.$$

$\therefore \quad l = -2\,, \quad m = 1.$

எடுத்துக்காட்டு 23

செலவுச் சார்பு $y = 2x\left(\frac{x+4}{x+3}\right) + 3$ க்கு இறுதி நிலைச் செலவானது, உற்பத்தி x அதிகரிக்கும்பொழுது, தொடர்ச்சியாக குறைகிறது என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$y = 2x\left(\frac{x+4}{x+3}\right) + 3$$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$$y = \frac{2x^2+8x}{x+3} + 3 \text{ ------- } (1)$$

இறுதிநிலைச் செலவு $= \dfrac{dy}{dx}$

$\therefore$ x-ஐ பொறுத்து, (1)-ஐ வகையிட

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+3)(4x+8)-(2x^2+8x)(1)}{(x+3)^2} + 0$$

$$= \frac{2(x^2+6x+12)}{(x+3)^2} = \frac{2(x^2+6x+9+3)}{(x+3)^2}$$

$$= 2\left(\frac{(x+3)^2+3}{(x+3)^2}\right) = 2\left(1+\frac{3}{(x+3)^2}\right)$$

இதிலிருந்து உற்பத்தி x அதிகரிக்கும்பொழுது இறுதிநிலைச் செலவு $\dfrac{dy}{dx}$ ஆனது குறைகிறது என அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 24

செலவுச் சார்பு $C = 100 + x + 2x^2$ -க்கு, இங்கு x என்பது உற்பத்தியைக் குறித்தால், AC க்கான வளைவரையின் சா-வு $= \dfrac{1}{x}$(MC-AC) என நிறுவுக. (MC இறுதிநிலைச் சார்பு, AC சராசரிச் செலவு)

தீர்வு :

செலவுச் சார்பு $C = 100 + x + 2x^2$

சராசரி செலவு (AC) $= \dfrac{100+x+2x^2}{x} = \dfrac{100}{x} + 1 + 2x$

AC-ன் சா−வு $= \dfrac{d}{dx}(AC)$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{100}{x}+1+2x\right) = -\frac{100}{x^2} + 2 \text{ -----}(1)$$

இறுதிநிலைச் செலவு MC $= \frac{d}{dx}(C)$

$$= \frac{d}{dx}(100+x+2x^2) = 1 + 4x$$

$$MC - AC = (1+4x) - (\frac{100}{x} + 1 + 2x) = -\frac{100}{x} + 2x$$

$$\frac{1}{x}(MC - AC) = \frac{1}{x}(-\frac{100}{x} + 2x) = -\frac{100}{x^2} + 2 \quad \text{------(2)}$$

(1) மற்றும் (2) களிலிருந்து

AC-ன் சா−வு $= \frac{1}{x}(MC\text{-}AC)$

எடுத்துக்காட்டு 25

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்திற்கு புள்ளி ($a\cos\theta$, $b\sin\theta$) இல் தொடுகோடு, செங்கோடு இவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

x-ஐ பொறுத்து வகையிட

$$\frac{1}{a^2}(2x) + \frac{1}{b^2} 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

$(a\cos\theta, b\sin\theta)$ இல் $\frac{dy}{dx} = -\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta} = m.$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\Rightarrow \quad y - b\sin\theta = -\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta}(x - a\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \quad ay\sin\theta - ab\sin^2\theta = -bx\cos\theta + ab\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \quad bx\cos\theta + ay\sin\theta = ab(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = ab$$

இருபுறமும் 'ab' ஆல் வகுக்க கிடைப்பது,

$$\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$$

$\therefore$ தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$$

$$\Rightarrow \quad y - b\sin\theta = \frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}(x - a\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \quad by\cos\theta - b^2\sin\theta\cos\theta = ax\sin\theta - a^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad ax\sin\theta + by\cos\theta = \sin\theta\cos\theta\,(a^2 - b^2)$$

இருபுறமும் $\sin\theta\cos\theta$ $(\sin\theta\cos\theta \neq 0)$ ஆல் வகுக்க கிடைப்பது,

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2$$

$\therefore$ செங்கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2$

எடுத்துக்காட்டு 26

தேவைச் சார்பு $y = 10\text{-}3x^2$ க்கு (1, 7) இல் தொடுகோடு, செங்கோட்டின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

தேவை வளைவரை $y = 10 - 3x^2$

x-ஐ பொறுத்து வகையிட

$\frac{dy}{dx} = -6x$ புள்ளி (1, 7) இல் $\frac{dy}{dx} = -6 = m.$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடானது

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 7 = -6(x - 1)$$

$$\Rightarrow 6x + y - 13 = 0.$$

செங்கோட்டின் சமன்பாடானது

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1) \Rightarrow y - 7 = -\frac{1}{-6}(x - 1)$$

$$y - 7 = \frac{1}{6}(x - 1) \quad \Rightarrow 6y - 42 = x - 1$$

$$\Rightarrow \quad x - 6y + 41 = 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 27

$y = (x-1)(x-2)$ என்ற வளைவரையின் எப்புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோடு x-அச்சுடன் 135^o கோணத்தை ஏற்படுத்தும்?

தீர்வு :

$y = (x-1)(x-2)$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

x-ஐ பொறுத்து வகையிட

$$\frac{dy}{dx} = (x-1)(1) + (x-2)(1)$$

$$= 2x - 3 \qquad \text{-------(1)}$$

தொடுகோடானது x-அச்சுடன் 135^o-யை ஏற்படுத்துகிறது.

$$\therefore \quad m = \frac{dy}{dx} = \tan\theta$$

$$= \tan 135^o = -1$$

$$\tan 135^o = \tan(180^o - 45^o)$$

$$= -\tan 45^o = -1$$

(1) மற்றும் (2) ஐ சமப்படுத்த கிடைப்பது

$2x - 3 = -1$ அல்லது $2x = 2 \Rightarrow x = 1$

$x = 1$ எனில், $y = (1-1)(1-2) = 0$. $\therefore$ புள்ளி $(1, 0)$ ஆகும்.

பயிற்சி 3.3

1) $y = \frac{1}{3}(x^2 + 10x - 15)$ என்ற வளைவரையின் தொடுகோட்டின் சா−வை $(0, 5)$ என்ற புள்ளியில் காண்க. வளைவரையில் எந்த புள்ளியில் தொடுகோடு வரைந்தால், அந்த தொடுகோட்டின் சா−வு $\frac{8}{5}$ ஆக இருக்கும்?

2) $y = ax^2 - 6x + b$ எனும் வளைவரையானது $(0, 2)$ என்ற புள்ளி வழியாக செல்கிறது. மேலும் $x = 1.5$ இல் அதன் தொடுகோடானது x-அச்சுக்கு இணையாக உள்ளது எனில், a மற்றும் b-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

3) செலவுச் சார்பு $y = 3x\left(\frac{x+7}{x+5}\right) + 5$-க்கு உற்பத்தி x அதிகரிக்கும் பொழுது அதன் இறுதிநிலைச் செலவு தொடர்ச்சியாக வீழ்ச்சி அடைகிறது என நிறுவுக.

4) கீழ்காணும் வளைவரைகளுக்கு தொடுகோடு மற்றும் செங்கோட்டின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(i) $y^2 = 4x$ க்கு புள்ளி (1, 2) இல் (ii) $y = \sin 2x$ க்கு $x = \frac{\pi}{6}$ இல்

(iii) $x^2 + y^2 = 13$ க்கு புள்ளி (-3, -2) இல்

(iv) $xy = 9$ க்கு $x = 4$ இல் (v) $y = x^2 \log x$ க்கு $x = e$ இல்

(vi) $x = a \cos\theta$, $y = b \sin\theta$ க்கு $\theta =$ இல்

5) $y = x^2 + x + 2$ க்கு $x = 6$ எனும் புள்ளியில் தொடுகோடு மற்றும் செங்கோடு இவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

6) தேவைச் சார்பு $y = 36 - x^2$ க்கு $y = 11$ எனும் புள்ளியில் தொடுகோடு மற்றும் செங்கோட்டின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

7) $3y = x^3$ எனும் வளைவரையின் மீது எந்த புள்ளிகளில் தொடுகோடு வரைந்தால் அது x-அச்சுடன் 45° கோணத்தை எற்படுத்தும்?

8) $y = b$ என்ற வளைவரை y-அச்சை வெட்டும் புள்ளியிடத்து $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ எனும் கோட்டை தொடுகிறது என நிறுவுக.

9) $y(x-2)(x-3) - x + 7 = 0$ எனும் $\frac{\pi}{4}$ $e^{-x/a}$ வளைவரைக்கு, x-அச்சை வெட்டும் புள்ளியிடத்து தொடுகோடு, செங்கோட்டின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

10) $y = x^2 - 3x + 1$ மற்றும் $x(y+3) = 4$ எனும் வளைவரைகள் $(2, -1)$ என்ற புள்ளியில் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்கின்றன என்று நிறுவுக.

11) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதி பரவளையத்திற்கு தொடுகோடு மற்றும் செங்கோட்டின் சமன்பாடுகளை $(a \sec\theta, b \tan\theta)$ என்ற புள்ளியில் காண்க.

12) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ எனும் வட்டத்திற்கு எப்புள்ளியில் தொடுகோடு அமைந்தால் அது (i) x-அச்சுக்கு (ii) y-அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும்?

பயிற்சி 3.4

ஏற்புடைய விடையைத் தெரிவு செ-க

1) $C = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 8$ எனும் சார்பின் சராசரி மாறாச் செலவானது

(a) $\frac{2}{x}$ (b) $\frac{4}{x}$ (c) $\frac{-3}{x}$ (d)

2) ஒரு நிறுவனம் ஒரு பொருளின் அளவில் 60 மற்றும் 40 அலகுகள் தயார் செ–ய ஆகும் செலவு முறையே ரூ.1400 மற்றும் ரூ.1200 எனில், ஒவ்வொரு அலகுக்கும் மாறும் செலவானது

(a) ரூ. 100 (b) ரூ. 2600 (c) ரூ. 10 (d) ரூ. 5

3) ஒரு பொருளின் அளவில் 20 அலகுகள் உற்பத்தி செ–ய ஆகும் செலவு ரூ. 2500 மற்றும் 50 அலகுகள் உற்பத்தி செ–ய ஆகும் செலவு ரூ. 3400 எனில் அதன் செலவுச் சார்பானது

(a) $y = 30x + 1900$ (b) $y = 20x + 5900$

(c) $y = 50x + 3400$ (d) $y = 10x + 900$

4) மாறும் செலவு ஓர் அலகுக்கு ரூ. 40, மாறாச் செலவு ரூ. 900 மற்றும் ஓர் அலகு விற்பனை விலை ரூ. 70 எனில் இலாபச் சார்பானது

(a) $P = 30x - 900$ (b) $P = 15x - 70$

(c) $P = 40x - 900$ (d) $P = 70x + 3600$

5) செலவுச் சார்பு $c = \frac{1}{10}e^{2x}$ இன் இறுதி நிலைச் செலவானது

(a) $\frac{1}{10}$ (b) $\frac{1}{5}e^{2x}$ (c) $\frac{1}{10}e^{2x}$ (d) $\frac{1}{10}e^{x}$

6) தேவைச் சார்பு $p = -x + 10$; $0 \leq x \leq 10$ இங்கு p என்பது ஓர் அலகு விற்பனை விலை. அந்த பொருளின் தேவைப்படும் அலகுகளின் எண்ணிக்கை x என்க. $x = 3$ அலகுகள் எனில், அதன் இறுதி நிலை வருவாயானது

(a) ரூ. 5 (b) ரூ. 10 (c) ரூ. 4 (d) ரூ. 30

7) ஒரு பொருளின் தேவைச் சார்பு $q = -3p + 15$; $0 < p < 5$ இங்கு p என்பது ஓர் அலகு விற்பனை விலையைக் குறிக்கிறது எனில், தேவை நெகிழ்ச்சியானது

(a) $\frac{9p^2 + 15}{p}$ (b) $\frac{9p - 45}{p}$ (c) (d)

8) $y = 3x + 2$ என்ற சார்புக்கு x- ஆனது 1.5 லிருந்து 1.6க்கு அதிகரிக்கும்போது y-ன் சராசரி மாறு வீதமானது

(a) 1 (b) 0.5 (c) 0.6 (d) 3.

9) $y = 2x^2 + 3x$ என்ற சார்பில் $x = 4$ எனில், y-ன் உடனடி மாறு வீதமானது

(a) 16 (b) 19 (c) 30 (d) 4.

10) x-ஐ பொறுத்து y-இன் மாறு வீதம் 6 ஆகும். x-ஆனது 4 அலகுகள் / வினாடி என்ற வீதத்தில் மாறுகிறது எனில் y ஆனது 1 வினாடிக்கு மாறும் வீதமானது

(a) 24 (b) 10 (c) 2 (d) 22

11) சட்டை தயாரிக்கும் ஒரு நிறுவனத்தின் வாராந்திர இலாபம் (ரூபா–களில்) P ஆனது, சட்டை வாரத்தில் தயாரிக்கும் x சட்டைகளைப் பொறுத்தது. $P = 2000x - 0.03x^2 - 1000$ என்ற அடிப்படையில் இலாபமானது கணக்கிடப்படுகிறது. உற்பத்தியின் அளவு x ஆனது ஒரு வாரத்திற்கு 1000 சட்டைகள் எனில், இலாபத்தில் ஏற்படக்கூடிய மாற்றத்தின் மாறும் வீதமானது.

(a) ரூ.140 (b) ரூ. 2000
(c) ரூ.1500 (d) ரூ. 1940

12) செவ்வக வடிவ நீச்சல் குளத்தின் அடிபாகமானது 25மீ x 40மீ அளவு கொண்டுள்ளது. தண்ணீரானது 500மீ^{3}/நிமிடம் என்ற வீதத்தில் குளத்தில் ஊற்றப்படுகிறது எனில் குளத்தில் எந்த அளவுக்கு தண்ணீரின் மட்டம் உயருகிறது?

(a) 0.5மீ/நிமிடம் (b) 0.2மீ/நிமிடம்
(c) 0.05மீ/நிமிடம் (d) 0.1மீ/நிமிடம்

13) $y = x^3$ என்ற வளைவரைக்கு (2, 8) எனும் புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சா–வானது

(a) 3 (b)12 (c) 6 (d) 8

14) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ என்ற வளைவரைக்கு (9, 4) -இல் செங்கோட்டின் சா–வு

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $-\frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) $-\frac{3}{2}$

15) $y = 1 + ax - x^2$ என்ற வளைவரையில் $(1, -2)$ என்ற புள்ளியில் வரைந்த தொடுகோடானது x-அச்சுக்கு இணை எனில் 'a'-ன் மதிப்பானது

(a) -2 (b) 2 (c) 1 (d) -1

16) $y = \cos t$ மேலும் $x = \sin t$ எனும் வளைவரைக்கு $t = \frac{\pi}{4}$ யிடத்து தொடுகோட்டின் சா–வானது

(a) 1 (b) 0 (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) -1

17) $y^2 = x$ என்ற வளைவரையின் தொடுகோடு x-அச்சுடன் $\frac{\pi}{4}$ கோணத்தை உருவாக்கும் புள்ளியானது

(a)$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ (b) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (c) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ (d) (1, -1)

18) $y = 2x^2 - x + 1$ என்ற வளைவரைக்கு $(1, 2)$ என்ற புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடுகோடு, எந்த கோட்டிற்கு இணையாக இருக்கும்?

(a) $y = 3x$ (b) $y = 2x+4$

(c) $2x + y + 7 = 0$ (d) $y = 5x - 7$

19) $y = x^2 - \log x$ என்ற வளைவரைக்கு $x = 2$ ல் தொடுகோட்டின் சா–வு

(a) $\frac{7}{2}$ (b) $\frac{2}{7}$ (c) $-\frac{7}{2}$ (d) $-\frac{2}{7}$

20) $x = y^2 - 6y$ என்ற வளைவரை y -அச்சை கடக்கும் இடத்தில் அதன் சா–வானது

(a) 5 (b) -5 (c) $\frac{1}{6}$ (d) $-\frac{1}{16}$

வகையீட்டின் பயன்பாடுகள் - II **4**

இலாபத்தை பெரும அளவில் அதிகரிப்பது (Profit maximisation) சரக்கு நிலை கட்டுபாடு (Inventory control) மற்றும் மிகு ஆதாய கோருதல் அளவு (Economic order quantity) ஆகியனவற்றினை பெரும மற்றும் சிறும கருத்துருவின் அடிப்படையில் காண்போம்.

பகுதிவகையிடலையும், அதனைக் கணக்கிடும் முறையினையும் காண்போம். உற்பத்திச் சார்பு, தொழிலாளர் மற்றும் மூலதனத்தின் இறுதி நிலை உற்பத்திகள் மேலும் தேவையின் பகுதி நெகிழ்ச்சி ஆகியனவற்றை பகுதி வகையிடல் மூலம் அறிவோம்.

4.1 பெருமம் மற்றும் சிறுமம் (Maximum and Minimum)

4.1.1 கூடும் மற்றும் குறையும் சார்புகள்

இடைவெளி $a \leq x \leq b$ இல் x ன் மதிப்பு அதிகரிக்கும் பொழுது $y = f(x)$ என்ற சார்பின் மதிப்பு அதிகரித்தால் சார்பு $f(x)$ ஆனது $[a, b]$ இல் ஒரு கூடும் சார்பு எனப்படும்

(அ–து) $a \leq x_1 < x_2 \leq b \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ எனில்

$f(x)$ ஆனது ஒரு கூடும் சார்பாகும்.

இடைவெளி $a \leq x \leq b$ -இல் x-ன் மதிப்பு அதிகரிக்கும் பொழுது $y = f(x)$ என்ற சார்பின் மதிப்பு குறையுமானால் சார்பு $f(x)$ ஆனது $[a, b]$ –இல் ஒரு குறையும் சார்பு எனப்படும்.

(அ.து) $a \leq x_1 < x_2 \leq b \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ எனில் $f(x)$ ஆனது ஒரு குறையும் சார்பாகும்.

4.1.2 வகைக்கெழுவின் குறி

$[a,b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் f ஆனது ஒரு கூடும் சார்பு என்க. $[a, b]$ –இல் எந்த இரு மெ–யெண்கள் x_1, x_2 களுக்கும் $x_1 < x_2$ எனில் $f(x_1) \leq f(x_2)$ ஆகும்.

(அ–து) $f(x_1) \leq f(x_2)$, $x_2 - x_1 > 0$

$$\therefore \qquad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

எனவே $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0,$$ (எல்லை உண்டு எனில்)

$\Rightarrow \quad f'(x) \geq 0$ $[a,b]$-இல் உள்ள அனைத்து x-களுக்கும்.

இதேபோல், f ஆனது $[a,b]$-ல் குறையுமானால் $f'(x) \leq 0$ ஆக இருக்கும் (வகைபடுத்த முயுமானால்). f ஆனது $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சியுடையது என்றால் இதன் மறுதலையும் உண்மையாகும்.

குறிப்பு

$[a,b]$ –ல் சார்பு f தொடர்ச்சியாக இருந்து (a,b) –ல் வயைீடு காணதக்கதாயின்,

(i) திறந்த இடைவெளி (a, b) –ல் உள்ள ஒவ்வொரு x-க்கும் $f'(x) > 0$ ஆக இருந்தால், சார்பு f ஆனது $[a,b]$ –இல் கண்டிப்பாகக் கூடும் சார்பாகும்.

(ii) [a, b] –இல் உள்ள அனைத்து x-க்கும் $f'(x) < 0$ ஆக இருந்தால் சார்பு f ஆனது $[a,b]$-இல் கண்டிப்பாகக் குறையும் சார்பாகும்.

(iii) [a, b] –இல் உள்ள ஒவ்வொரு x-க்கும் $f'(x) = 0$ ஆக இருந்தால் $[a,b]$ –இல் சார்பு f, ஒரு மாறிலி ஆகும்.

(iv) [a, b] –இல் உள்ள ஒவ்வொரு x- க்கும் $f'(x) \geq 0$ ஆக இருக்கும் பொழுது சார்பு f, $[a,b]$ –இல் கூடும் சார்பாகும்.

(v) [a, b] –இல் உள்ள ஒவ்வொரு x-க்கும் $f'(x) \leq 0$ ஆக இருக்கும் பொழுது சார்பு f, $[a,b]$ –இல் குறையும் சார்பாகும்.

ஒரு சார்பு கூடும் சார்பா அல்லது குறையும் சார்பா என அறிய மேற்கொண்ட முடிவுகளைப் பயன்படுத்தலாம்.

4.1.3 சார்பின் தேக்க நிலை மதிப்பு

[a ,b] என்ற இடைவெளியில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி x-இல் $y = f(x)$ என்ற சார்பு, கூடும் சார்பாகவோ அல்லது குறையும் சார்பாகவோ இல்லாமல் இருக்கலாம். அந்த நிலையில் $y = f(x)$ –யை அந்த புள்ளி x-இல் தேக்க நிலையைப் பெறுகிறது எனலாம். தேக்க நிலைப்புள்ளியில் $f'(x) = 0$ வாகவும் மற்றும் தொடுகோடானது x அச்சக்கு இணையாகவும் இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1

$y = x-$ எனில், x ன் எல்லா மெ- எண் மதிப்புகளுக்கும் $(x \neq 0)$ y - ஆனது ஒரு கண்டிப்பாகக் கூடும் சார்பாகும் என நிறுவுக.

தீர்வு :

$y = x - \frac{1}{x}$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

x ஐ பொறுத்து வகையிட

$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x^2} > 0,$ x இன் எல்லா மெ– எண் மதிப்புகளுக்கும் $(x \neq 0)$

$\therefore y$ ஒரு கண்டிப்பாக கூடும் சார்பாக அமைகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2

$y = 1+$ எனில், x ன் எல்லா மெ- எண் மதிப்புகளுக்கும் $(x \neq 0)$ y - ஆனது ஒரு கண்டிப்பாக குறையும் சார்பாகும் என நிறுவுக.

தீர்வு :

$y = 1 + \frac{1}{x}$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது $\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = 0 - \frac{1}{x^2} < 0,$ x இன் எல்லா மெ– எண் மதிப்புகளுக்கும் $(x \neq 0)$

$\therefore y$ ஒரு கண்டிப்பாக குறையும் சார்பாக அமைகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3

எந்தெந்த இடைவெளிகளில் $2x^3 - 9x^2 + 12x + 4$ எனும் சார்பு கண்டிப்பாகக் கூடும் சார்பாகவும் மற்றும் கண்டிப்பாகக் குறையும் சார்பாகவும் இருக்கும் எனக் காண்க.

தீர்வு :

$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 4$ என்க

$= 6x^2 - 18x + 12$

$= 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x - 2)(x - 1)$

$x < 1$ அல்லது $x > 2$ எனில் $\frac{dy}{dx} > 0$

$\therefore$ x ஆனது $(1, 2)$ என்ற இடைவெளிக்கு வெளியில் உள்ளது.

மேலும் $1 < x < 2$ எனும் பொழுது $\frac{dy}{dx} < 0$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பு $[1, 2]$ இடைவெளிக்கு வெளியே கண்டிப்பாகக் கூடும் சார்பாகவும், $(1, 2)$ என்ற இடைவெளியில் கண்டிப்பாகக் குறையும் சார்பாகவும் உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 4

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ எனும் சார்புக்கு தேக்க நிலைப் புள்ளிகளையும் தேக்க நிலை மதிப்புகளையும் காண்க.

தீர்வு :

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ என்க

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 9$$

தேக்க நிலைப் புள்ளியில், $\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \quad \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow (x + 1)(x - 3) = 0$

$x = -1$ மற்றும் $x = 3$ களில் தேக்க நிலைப் புள்ளிகள் கிடைக்கின்றன.

$x = -1$ எனில், $y = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 5 = 10$

$x = 3$ எனில், $y = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 5 = -22$

$\therefore$ தேக்க நிலை மதிப்புகள் 10 மற்றும் -22

தேக்க நிலைப் புள்ளிகள் $(-1, 10)$ மற்றும் $(3, -22)$

எடுத்துக்காட்டு 5

செலவுச் சார்பு $C = 2000 + 1800x - 75x^2 + x^3$ க்கு எப்பொழுது அதன் மொத்த செலவு கூடுகிறது மற்றும் எப்பொழுது குறைகிறது என்பதனைக் காண்க. இறுதி நிலை செலவின் (MC) தன்மையைப் பற்றியும் சோதிக்க.

தீர்வு :

$$C = 2000 + 1800x - 75x^2 + x^3$$

$$\frac{dC}{dx} = 1800 - 150x + 3x^2$$

$$\frac{dC}{dx} = 0 \Rightarrow 1800 - 150x + 3x^2 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 150x + 1800 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 50x + 600 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 20)(x - 30) = 0$$

$$\Rightarrow x = 20 \text{ or } x = 30$$



(i) $0 < x < 20, \frac{dC}{dx} > 0$	(i) $x = 10$ எனில் $\frac{dC}{dx} = 600 > 0$
(ii) $20 < x < 30, \frac{dC}{dx} < 0$	(ii) $x = 25$ எனில் $\frac{dC}{dx} = -75 < 0$
(iii) $x > 30$; $\frac{dC}{dx} > 0$	(iii) $x = 40$ எனில் $\frac{dC}{dx} = 600 > 0$

$\therefore$ $0 < x < 20$ மற்றும் $x > 30$ எனும் இடைவெளிகளில் C கூடுகிறது.

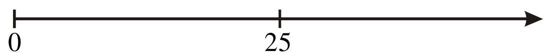
$20 < x < 30$ –ல் C குறைகிறது.

$$MC = \frac{d}{dx}(C)$$

$$\therefore \quad MC = 1800 - 150x + 3x^2$$

$$\frac{d}{dx}(MC) = -150 + 6x$$

$$\frac{d}{dx}(MC) = 0 \Rightarrow 6x = 150 \Rightarrow x = 25.$$



(i) $0 < x < 25, \frac{d}{dx}(MC) < 0$	(i) $x = 10$ எனில் $\frac{d}{dx}(MC) = -90 < 0$
(ii) $x > 25, \frac{d}{dx}(MC) > 0$	(ii) $x = 30$ எனில் $\frac{d}{dx}(MC) = 30 > 0$

$\therefore\ x < 25$ –இல் MC குறைகிறது.

மற்றும் $x > 25$-இல் MC கூடுகிறது.

4.1.4 பெரும மதிப்பும் சிறும மதிப்பும்

$[a,b]$ இல் சார்பு f வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. (a,b) –ல் c ஒரு புள்ளி என்க.

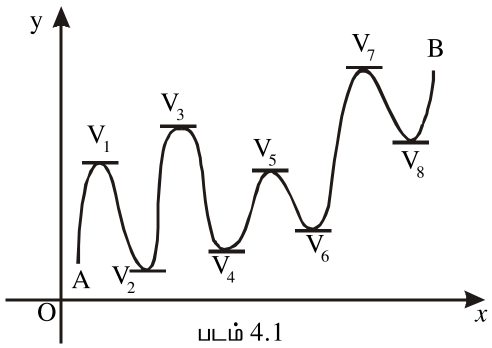
(i) c –இன் அண்மையகம் $(c-\delta,\ c+\delta)$ –இல் c தவிர x –இன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $f(c) > f(x)$ என இருந்தால் $f(c)$ என்பது $x = c$ இல் f இன் சார்ந்த பெருமம் அல்லது பெருமம் என்கிறோம்.

(ii) புள்ளி c இன் அண்மையகம் $(c-\delta, c+\delta)$ –இல் c தவிர x-இன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $f(c) < f(x)$ என இருந்தால் $x = c$ என்ற இடத்தில் f இன் சார்ந்த சிறுமம் அல்லது சிறுமம் என்போம்.

(iii) சார்பு f ஆனது புள்ளி c -இல் சிறும மதிப்பை அல்லது பெரும மதிப்பை அடைந்தல், $f(c)$, ஒரு அறுதி மதிப்பு (extremum value) எனப்படும்.

4.1.5 இடம் சார்ந்த மற்றும் முழுதளாவிய (தனித்த) பெருமம் மற்றும் முழுதளாவிய சிறுமம் (Loal and Global Maxima and Minimia)

$y = f(x)$ என்ற சார்பின் வரை படத்தை (படம் 4.1) கவனிக்க.



படம் 4.1

$y = f(x)$ க்கு பல பெரும மற்றும் சிறும புள்ளிகள் உள்ளன. புள்ளிகள் $V_1, V_2, \ldots V_8$ இடத்து $\frac{dy}{dx} = 0$. உண்மையில் இந்த சார்பானது, V_1, V_3, V_5, V_7 எனும் இடத்தில் பெரும மாகவும் மேலும்

V_2, V_4, V_6,V_8-இல் சிறுமமாகவும் உள்ளது. V_5-இல் இருக்கும் பெரும மதிப்பானது V_8 –இல் இருக்கும் சிறும மதிப்பை விட குறைவாக உள்ளது என்பதை கவனிக்க. இந்த பெருமங்கள் மற்றும் சிறுமங்கள் இடஞ்சார்ந்த பெருமங்கள் அல்லது சிறுமங்கள் என்று அழைக்கப்படும். A, B-களுக்கு இடையில் வளைவரையை நோக்குங்கால், சார்பானது V_7 -இல் தனித்த பெருமம் அல்லது முழுதளாவிய பெருமத்தைப் பெறுகிறது, V_2-இல் தனித்த சிறுமம் அல்லது முழுதளாவிய சிறுமத்தைப் பெறுகிறது.

குறிப்பு

இடஞ்சார்ந்த பெருமம் அல்லது இடஞ்சார்ந்த சிறுமம் என்பதை நாம் பெருமம் அல்லது சிறுமம் என்று அழைக்கிறோம்.

4.1.6 பெருமங்கள் மற்றும் சிறுமங்களுக்கான நிபந்தனைகள்

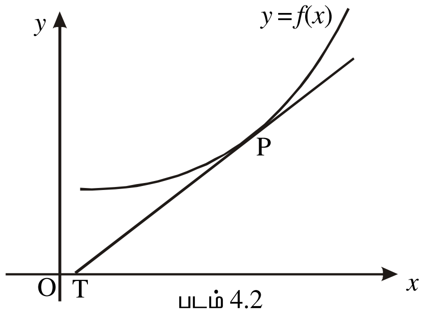
	பெருமம்	சிறுமம்
தேவையான நிபந்தனை	$\frac{dy}{dx} = 0$	$\frac{dy}{dx} = 0$
போதுமான நிபந்தனை	$\frac{dy}{dx} = 0$; $\frac{d^2y}{dx^2}$ <0	$\frac{dy}{dx} = 0$; $\frac{d^2y}{dx^2}$ >0

4.1.7 குழிவு மற்றும் குவிவு (Concavity and Convexity)

$y = f(x)$ என்ற சார்பின் வரைபடத்தை (படம் 4.2) கவனிக்க.

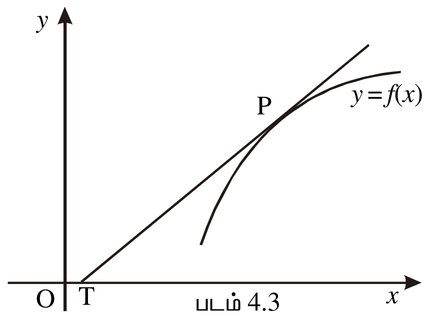
$y = f(x)$ என்ற வளைவரைக்கு P-லிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோட்டை PT என்க.

வளைவரையானது (அல்லது வளைவரையின் வில்) PT என்ற தொடுகோட்டிற்கு மேலே இருந்தால் $y= f(x)$ மேல்நோக்கி குழிவு அல்லது கீழ்நோக்கி குவிவு ஆகும்.



படம் 4.2

வளைவரையானது (அல்லது வளைவரையின் வில்) PT என்ற தொடுகோட்டிற்கு கீழாக இருந்தால் $y = f(x)$ மேல்நோக்கி குவிவு அல்லது கீழ்நோக்கி குழிவு ஆகும் (படம் 4.3).



படம் 4.3

4.1.8 குழிவு மற்றும் குவிவுக்கான நிபந்தனைகள்

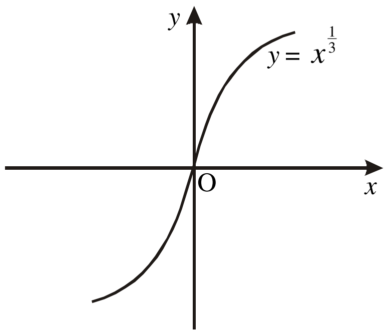
$f(x)$ இருமுறை வகையிடத்தக்கது என்க. ஏதேனும் ஓர் இடைவெளியில்,

(i) $f''(x) > 0$ எனில், வளைவரை $y = f(x)$ ஆனது மேல்நோக்கி குழிவாகும்.

(ii) $f''(x) < 0$ எனில், வளைவரை $y = f(x)$ ஆனது மேல்நோக்கி குவிவாகும்.

4.1.9 வளைவு மாற்றப் புள்ளி (Point of Inflection)

$y = f(x)$ எனும் வளைவரையின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியில் வளைவரையானது மேல்நோக்கி **குழிவிலிருந்து** மேல்நோக்கி **குவிவாகவோ** அல்லது மேல்நோக்கி **குவிவுயிலிருந்து** மேல்நோக்கி **குழிவுவாகவோ** மாறுமானால் அப்புள்ளியை வளைவரையின் வளைவு மாற்றப் புள்ளி என அழைக்கிறோம்.



படம் 4.4

4.1.10 வளைவு மாற்றப்புள்ளிகளுக்கான நிபந்தனைகள்

வளைவரை $y = f(x)$ அதனுடைய ஒரு புள்ளி $x = c$-யில்

(i) $f''(c) = 0$ அல்லது வரையறுக்கப்படவில்லை மற்றும்

(ii) x ஆனது c வழியே பெருக, $f''(x)$-குறி மாறுகிறது. (அதாவது $f'''(x)$ உளதாகும்பொழுது $f'''(c) \neq 0$) எனில் $x = c$ ஒரு வளைவு மாற்றப்புள்ளி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6

$2x^3 + 3x^2 - 36x + 10$ என்ற சார்பின் பெரும மற்றும் சிறும மதிப்புக்களைக் காண்க.

தீர்வு :

$y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 10$ என்க

x -ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 6x - 36 \qquad \text{--------(1)}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 6x^2 + 6x - 36 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 3)\ (x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x = -3,\ 2$$

x -ஐ பொறுத்து மறுபடியும் வகையிட,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x + 6$$

$x = -3$ எனில், $\frac{d^2y}{dx^2} = 12\ (-3) + 6 = -30 < 0$

$\therefore$ அந்த சார்பு $x = -3$ ல் பெரும மதிப்பைப் பெறுகிறது.

$\therefore$ பெரும மதிப்பு $y = 2(-3)^3 + 3(-3)^2 - 36(-3) + 10 = 91$

$x = 2$ எனில் $\frac{d^2y}{dx^2} = 12(2) + 6 = 30 > 0$

$\therefore$ அந்த சார்பு $x = 2$ –ல் சிறும மதிப்பைப் பெறுகிறது.

$\therefore$ சிறும மதிப்பு $y = 2(2)^3 + 3(2)^2 - 36(2) + 10 = -34$

எடுத்துக்காட்டு 7

$f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x + 1$ என்ற சார்புக்கு $[-2, 1]$ என்ற இடைவெளியில் தனித்த (முழுதளாவிய) பெரும மற்றும் சிறும மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$$f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x + 1$$

$$f'(x) = 15x^4 - 75x^2 + 60$$

பெரும மதிப்பை மற்றும் சிறும மதிப்பை அடையத் தேவையான நிபந்தனை

$f'(x) = 0$

$\Rightarrow 15x^4 - 75x^2 + 60 = 0$

$\Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^4 - 4x^2 - x^2 + 4 = 0$

$\Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$

$\therefore \quad x = \underline{+}1, -2, \qquad (2 \notin [-2, 1])$

$f''(x) = 60x^3 - 150x$

$f''(-2) = 60(-2)^3 - 150(-2) \quad = -180 < 0$

$\therefore$ $x = -2$-இல் $f(x)$ பெரும மதிப்பைப் பெறுகிறது.

$f''(-1) = 60(-1)^3 - 150(-1) \quad = 90 > 0$

$\therefore$ $x = -1$-இல் $f(x)$ சிறும மதிப்பைப் பெறுகிறது.

$f''(1) = 60(1)^3 - 150(1) \quad = -90 < 0$

$\therefore$ $x = 1$-இல் $f(x)$ பெரும மதிப்பைப் பெறுகிறது.

$x = -2$ -,ல் பெரும மதிப்பு

$f(-2) = 3(-2)^5 - 25(-2)^3 + 60(-2) + 1 = -15$

$x = -1$-ல் சிறும மதிப்பு

$f(-1) = 3(-1)^5 - 25(-1)^3 + 60(-1) + 1 = -37$

$x = 1$-ல் பெரும மதிப்பு

$f(1) = 3(1)^5 - 25(1)^3 + 60(1) + 1 \quad = 39$

$\therefore$ தனித்த (முழுதளாவிய) பெரும மதிப்பு = 39.

மற்றும் தனித்த (முழுதளாவிய) சிறும மதிப்பு $= -37$

எடுத்துக்காட்டு 8

$y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$ எனும் வளைவரையின் பெரும சா-வு என்ன? எப்புள்ளியில் இருக்கும்?

தீர்வு :

$$y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$$

x-ஐ பொறுத்து வகைக் காண,

$$\frac{dy}{dx} = -3x^2 + 6x + 9$$

$\therefore$ தொடுகோட்டின் சா–வு $-3x^2 + 6x + 9$ ஆகும்.

$M = -3x^2 + 6x + 9$ என்க

x-ஐ பொறுத்து வகைக் காண,

$$\frac{dM}{dx} = -6x + 6 \text{ ------------(1)}$$

சா–வு, பெரும மதிப்பைப் பெற $\frac{dM}{dx} = 0$ மற்றும் $\frac{d^2M}{dx^2} < 0$

$$\therefore \quad = 0 \Rightarrow -6x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1$$

(1)-ஐ மறுபடியும் x-ஐப் பொறுத்து வகைக் காண, $\frac{dM}{dx}$

$\frac{d^2M}{dx^2} = -6 < 0, \quad \therefore \quad x = 1$-ல் M பெரும மதிப்பை அடைகிறது.

$\therefore$ $x = 1$-ல் M-ன் பெரும மதிப்பு

$$M = -3(1)^2 + 6(1) + 9 = 12$$

$x = 1$ எனும்பொழுது; $y = -(1)^3 + 3(1)^2 + 9(1) - 27 = -16$

$\therefore$ பெரும சா–வு = 12

எனவே தேவையான புள்ளி (1, -16)

எடுத்துக்காட்டு 9

$y = 2x^4 - 4x^3 + 3$ எனும் வளைவரையின் வளைவு மாற்றப் புள்ளிகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$$y = 2x^4 - 4x^3 + 3$$

x-ஐப் பொறுத்து வகையிட,

$$= 8x^3 - 12x^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 24x^2 - 24x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 24x\,(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 0, 1$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 48x - 24$$

$x = 0, 1$-ல் $\quad \dfrac{d^3y}{dx^3} \neq 0.$

$\therefore$ வளைவு மாற்ற புள்ளிகள் $f(x)$-க்கு இருக்கின்றன.

$x = 0$ எனில், $y = 2(0)^4 - 4(0)^3 + 3 = 3$

$x = 1$ எனில், $y = 2(1)^4 - 4(1)^3 + 3 = 1$

$\therefore$ வளைவு மாற்ற புள்ளிகள் $(0, 3)$ மற்றும் $(1, 1)$.

எடுத்துக்காட்டு 10

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$ என்ற வளைவரை எந்தெந்த இடைவெளிகளில் மேல்நோக்கி குவிவாகவும் மற்றும் கீழ்நோக்கி குவிவாகவும் உள்ளது எனக் காண்க.

தீர்வு :

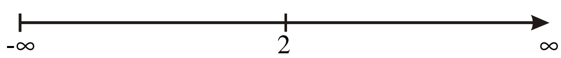
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

x-ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6(x-2) = 0 \quad \therefore x = 2$$



(i) $-\infty < x < 2, f''(x) < 0$	(i) $x = 0$ எனில், $f''(x) = -12 < 0$
(ii) $2 < x < \infty, f''(x) > 0$	(ii) $x = 3$ எனில், $f''(x) = 6 > 0$

$\therefore$ $(-\infty, 2)$ எனும் இடைவெளியில் கொடுக்கப்ட்டுள்ள வளை வரையானது மேல்நோக்கி குவிவாக உள்ளது.

$(2, \infty)$ எனும் இடைவெளியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வளை வரையானது கீழ்நோக்கி குவிவாக உள்ளது.

பயிற்சி 4.1

1) $x^3 + 3x^2 + 3x + 7$ என்ற சார்பு x-இன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் கூடும் சார்பாகிறது என நிறுவுக.

2) x அதிகரிக்கும்போது $75 - 12x + 6x^2 - x^3$ என்பது எப்பொழுதும் குறைகிறது என நிறுவுக.

3) $x^3 + 8x^2 + 5x - 2$ என்ற சார்பு எந்தெந்த இடைவெளிகளில் கூடும் சார்பாக அல்லது குறையும் சார்பாக உள்ளது என்பதைக் காட்டுக.

4) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$ என்ற சார்புக்கு தேக்க நிலை புள்ளிகளையும், தேக்க நிலை மதிப்புகளையும் காண்க.

5) கீழ்வரும் மொத்த வருவா– சார்புகளுக்கு எப்பொழுது அதன் மொத்த வருவா– (R) கூடுகிறது. மற்றும் எப்போது குறைகிறது என்பதனைக் காண்க. இறுதி நிலை வருவாயின் (MR) தன்மையைப் பற்றியும் விவாதிக்க.

(i) $R = -90 + 6x^2 - x^3$ (ii) $R = -105x + 60x^2 - 5x^3$

6) கீழ்வரும் செலவு சார்புகளுக்கு எப்பொழுது அதன் மொத்த செலவு (C) கூடுகிறது மற்றும் எப்பொழுது குறைகிறது என்பதனைக் காண்க. இறுதி நிலை செலவின் (MC) தன்மையைப் பற்றியும் விவாதிக்க.

(i) $C = 2000 + 600x - 45x^2 + x^3$ (ii) $C = 200 + 40x - \frac{1}{2}x^2$.

7) கீழ்வரும் சார்புகளுக்கு பெரும மற்றும் சிறும மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $x^3 - 6x^2 + 7$ (ii) $2x^3 - 15x^2 + 24x - 15$

(iii) $x^2 + \frac{16}{x}$ (iv) $x^3 - 6x^2 + 9x + 15$

8) $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x + 15$ என்ற வளைவரைக்கு $[-\frac{3}{2}, 3]$ என்ற இடைவெளியில் தனித்த (முழுதளாவிய) பெரும மற்றும் சிறும மதிப்புகளைக் காண்க.

9) $y = x^4 - 4x^3 + 2x + 3$ என்ற வளைவரையின் வளைவு மாற்றப் புள்ளிகளைக் காண்க.

10) $f(x) = x^3 - 27x + 108$ என்ற சார்பின் பெரும மதிப்பானது அதன் சிறும மதிப்பை விட 108 கூடுதலாக உள்ளது என நிறுவுக.

11) $y = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 5x + 1$ எனும் வளைவரை எந்த இடைவெளிகளில் மேல்நோக்கி, கீழ்நோக்கி குவிவுடையது என்பதைக் காண்க.

12) உற்பத்தி q-ன் எம்மதிப்பிற்கு செலவு சார்பு $C = q^2 - 6q + 120$ ஆனது சிறும மதிப்பை பெறுகிறது என்பதனைக் காண்க.

13) $x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$ எனும் சார்பின் பெருமம் மேலும் சிறும மதிப்புகளைக் காண்க. $x = 0$ இடத்து அதன் தன்மையை விவாதிக்க.

14) $f(x) = x^2 + \dfrac{250}{x}$ எனும் சார்பு $x = 5$ எனும்போது மீச்சிறு மதிப்பைப் பெறுகிறது என நிறுவுக.

15) x எனும் ஒரு பொருளின் மொத்த வருவா– (TR) ஆனது TR = $12x+\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}$ எனில், சராசரி வருவாயின் (AR)-ன் உச்ச புள்ளியில் AR = MR (MR என்பது இறுதி நிலை வருவா–) என நிறுவுக.

4.2 பெருமங்கள் மற்றும் சிறுமங்களின் பயன்பாடுகள்

இலாபத்தை பெருமமாக்கல், செலவைக் குறைத்தல் போன்றவற்றைகளைத் தீர்மானிக்க 'பூச்சிய சா–வின்' கருத்துரு நமக்கு மிகவும் உதவியாக உள்ளது. இந்த பகுதியில் வணிகவியலில் பெருமம் மற்றும் சிறுமங்களின் பயன்பாடுகளைக் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 11

ஒரு நிறுவனம், x டன்கள் உற்பத்தி செ-ய ஆகும் மொத்த செலவு $C = (\frac{1}{10}x^3 - 5x^2 + 10x + 5)$. இறுதி நிலைச் செலவு மற்றும் சராசரி மாறும் செலவு ஆகியன சிறும மதிப்பைப் பெறுவதற்கான உற்பத்தியின் அளவைக் காண்க.

தீர்வு :

மொத்த செலவு $C(x) = (\frac{1}{10}x^3 - 5x^2 + 10x + 5)$

இறுதிநிலைச் செலவு $= \frac{d}{dx}(C)$

(அ–து) $MC = \frac{3}{10}x^2 - 10x + 10$

சராசரி மாறும் செலவு $= \frac{\text{மாறும் செலவு}}{x}$

(அ–து) $AVC = (\frac{1}{10}x^2 - 5x + 10)$

(i) $y = MC = \frac{3}{10}x^2 - 10x + 10$ என்க.

x -ஐ பொறுத்து வகையிட, $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{5}x - 10$

இறுதிநிலை செலவு சிறும மதிப்பைப் பெற,

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ மற்றும் } \frac{d^2y}{dx^2} > 0$$

$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{3}{5}x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{50}{3}$

$x = \frac{50}{3}$ எனில், $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{5} > 0$

$\therefore$ MC ஆனது சிறும மதிப்பைப் பெறுகிறது.

(அ–து) $x = \frac{50}{3}$ அலகுகள் எனில், இறுதிநிலைச் செலவு சிறும மதிப்பைப் பெறுகிறது.

(ii) $z = AVC = \frac{1}{10}x^2 - 5x + 10$ என்க.

x-ஐ பொறுத்து வகையிட, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{5}x - 5$

AVC சிறும மதிப்பைப் பெற $\frac{dz}{dx} = 0$ மற்றும் $\frac{d^2z}{dx^2} > 0$

$\frac{dz}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{1}{5}x - 5 = 0 \Rightarrow x = 25.$

$x = 25$ எனில், $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{5} > 0$

$\therefore$ AVC சிறும மதிப்பைப் பெறுகிறது. எனவே $x = 25$ அலகுகள் எனும்பொழுது சராசரி மாறும் செலவு சிறும மதிப்பைப் பெறுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 12

ஒரு தொழில் நிறுவனத்தின் மொத்த செலவுச் சார்பு $C = 15 + 9x - 6x^2 + x^3$ எனில் எப்பொழுது மொத்த செலவு சிறும மதிப்பைப் பெறும்?

தீர்வு :

செலவு $C = 15 + 9x - 6x^2 + x^3$

x-ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dC}{dx} = 9 - 12x + 3x^2 \qquad \text{----------(1)}$$

செலவு சிறும மதிப்பைப் பெறும்பொழுது $\frac{dC}{dx} = 0$ மற்றும் $\frac{d^2C}{dx^2} > 0$

$$\frac{dC}{dx} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = 3, \ x = 1$$

(1)-ஐ x-ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{d^2C}{dx^2} = -12 + 6x$$

$x = 1$ எனில், $\frac{d^2C}{dx^2} = -12 + 6 = -6 < 0$

$\therefore x = 1$-இல் C பெரும மதிப்பைப் பெறுகிறது.

$x = 3$ எனில், $\frac{d^2C}{dx^2} = -12 + 18 = 6 > 0$

$\therefore x = 3$-இல் C சிறும மதிப்பைப் பெறுகிறது.

$x = 3$ அலகுகள் எனில், மொத்த செலவு, சிறும மதிப்பைப் பெறுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 13

$P = \frac{4000x}{500+x} - x$ என்பது இலாபம் மற்றும் விளம்பர செலவைக் குறிக்கும் சமன்பாடாகும். இதில் x-ன் எம்மதிப்பிற்கு P ஆனது பெருமம் அடையும்?

தீர்வு :

இலாபம் $P = \dfrac{4000x}{500+x} - x$

x-ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dP}{dx} = \frac{(500+x)4000 - (4000x)(1)}{(500+x)^2} - 1$$

$$= \qquad -1 \qquad \text{-----------(1)}$$

இலாபம் பெருமம் எனில், $\dfrac{dP}{dx} = 0$ மற்றும் $\dfrac{d^2P}{dx^2} < 0$

$$\frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{2000000}{(500+x)^2} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2000000 = (500 + x)^2$$

$$\Rightarrow 1000 \times \sqrt{2} = 500 + x$$

$$1000 \times 1.414 = 500 + x$$

$$x = 914.$$

x-ஐப் பொறுத்து (1)-ஐ வகையிட,

$$\frac{d^2P}{dx^2} = -\frac{4000000}{(500+x)^3} \quad \frac{2000000}{(500+x)^2}$$

$\therefore \quad x = 914$ எனில், $\dfrac{d^2P}{dx^2} < 0 \quad \therefore$ இலாபம் பெருமம் அடைகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 14

ஒரு நிறுவனத்தின் மொத்த உற்பத்தி செலவு மற்றும் வருவாா ஆகியன $C = x^3 - 12x^2 + 48x + 11$ மற்றும் $R = 83x - 4x^2 - 21$ என உள்ளன. (i) வருவாா பெரும மதிப்பை அடையும்பொழுது (ii) இலாபம் பெரும மதிப்பை பெறும்பொழுதும் அதன் உற்பத்தி என்ன?

தீர்வு :

(i) வருவாா $R = 83x - 4x^2 - 21$

x-ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dR}{dx} = 83 - 8x$$

$$\frac{d^2R}{dx^2} = -8$$

வருவா– பெரும மதிப்பை அடையும்பொழுது $\frac{dR}{dx} = 0$ மற்றும் $\frac{d^2R}{dx^2} < 0$

$$\frac{dR}{dx} = 0 \Rightarrow 83 - 8x = 0 \quad \therefore\ x = \frac{83}{8}$$

மேலும் $\frac{d^2R}{dx^2} = -8 < 0.$ $\therefore$ வருவா– பெரும மதிப்பை அடைகிறது.

$\therefore\ x = \frac{83}{8}$ எனில், வருவா– பெரும மதிப்பை அடைகிறது.

(ii) இலாபம் $P = R - C$

$$= (83x - 4x^2 - 21) - (x^3 - 12x^2 + 48x + 11)$$

$$= -x^3 + 8x^2 + 35x - 32$$

x-ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dP}{dx} = -3x^2 + 16x + 35$$

$$\frac{d^2P}{dx^2} = -6x + 16$$

இலாபம் பெரும மதிப்பை பெறும்பொழுது $\frac{dP}{dx} = 0$ மற்றும் $\frac{d^2P}{dx^2} < 0$

$$\therefore\ \frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow -3x^2 + 16x + 35 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 16x - 35 = 0$$

$$\Rightarrow (3x + 5)\ (x - 7) = 0 \Rightarrow x = \frac{-5}{3} \text{ or } x = 7$$

$x =$ எனில், $= -6(\frac{-5}{3}) + 16 = 26 > 0$

$\therefore\ x =$ -ல் P மீச்சிறு மதிப்பை பெறுகிறது.

$x = 7$ எனில், $= -6(7) + 16 = -26 < 0$

$\therefore\ x = 7$ எனில், P பெரும மதிப்பை பெறுகிறது.

$\therefore$ $x = 7$ அலகுகள் எனில், இலாபம் பெரும மதிப்பை பெறுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 15

தொலைபேசி இணைப்பகத்தில் 10,000 தொலை பேசிகளுக்கு மேல் இல்லாமல் இருந்தால் ஒரு தொலைபேசி நிறுவனம் ரு.2 வீதம் ஒவ்வொரு தொலைபேசிக்கு இலாபத்தை ஈட்டுகிறது. 10,000 தொலைபேசிகளுக்கு மேல் இருந்தால் இலாபத்தில் 0.01 பைசா வீதம் ஒவ்வொரு தொலைபேசிக்கும் குறைகிறது எனில் அதிகபட்ச இலாபம் என்ன?

தீர்வு :

தொலைபேசிகளின் எண்ணிக்கையை x என்க.

ஒவ்வொரு தொலைபேசிக்கும் இலாபத்தில் குறைவது

$= (x - 10,000)\ (0.01), \quad x > 10,000.$

$= (0.01x - 100)$

ஒவ்வொரு தொலைபேசிக்கும் கிடைக்கும் இலாபம்

$= 200 - (0.01x - 100)$

$= (300 - 0.01x)$

x தொலைபேசிகளின் மொத்த இலாபம்

$= x(300 - 0.01x)$

$= 300x - 0.01x^2$

மொத்த இலாபம் $P = 300x - 0.01x^2$ என்க.

x-ஐ பொறுத்து வகையிட

$$\frac{dP}{dx} = 300 - 0.02\,x \qquad \text{---------}(1)$$

பெரும இலாபம் கிடைக்க நிபந்தனைகள்

$$\frac{dP}{dx} = 0 \text{ மற்றும் } \frac{d^2P}{dx^2} < 0$$

$$\frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow 300 - 0.02x = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{300}{0.02} = 15000.$$

x-ஐ பொறுத்து (1)-ஐ வகையிட,

$$\frac{d^2P}{dx^2} = -\,0.02 < 0$$

$\therefore$ P பெரும மதிப்பை $x = 15000$- இல் அடைகிறது.

$\therefore$ $x = 15,000$ எனும்போது பெரும இலாபமானது

$$P = (300 \times 15,000) - (0.01) \times (15,000)^2 \text{ பைசாக்கள்}$$
$$= \text{ரூ. } (45,000 - 22,500) = \text{ரூ. } 22,500$$

$\therefore$ பெரும இலாபம் ரூ. 22,500.

எடுத்துக்காட்டு 16

ஒரு நிறுவனத்தின் மொத்த செலவு சார்பானது $C = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 28x + 10$ இங்கு x ஆனது உற்பத்தி ஆகும். உற்பத்தியின் ஒவ்வொரு அலகிற்கும் ரூ. 2 வீதம் விதிக்கப்பட்ட வரியை உற்பத்தியாளர் தன் செலவுடன் சேர்த்துக் கொள்கிறார். வியாபார சந்தையின் தேவைச் சார்பு $p = 2530 - 5x$ எனக் கொடுக்கப் பட்டால், பெரும இலாபத்தை ஈட்டும் உற்பத்தியின் அளவையும், விலையும் காண்க. இங்கு p என்பது உற்பத்தியின் ஒவ்வொரு அலகின் விலையைக் குறிக்கிறது.

தீர்வு :

x அலகுகள் உற்பத்திக்கான மொத்த வருவா– $(R) = px$

$$= (2530 - 5x)x = 2530x - 5x^2$$

வரி விதிக்கப்பட்ட பின் மொத்த செலவு சார்

$$C + 2x = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 28x + 10 + 2x$$
$$= \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 30x + 10$$

இலாபம் = வருவா– – செலவு

$$= (2530x - 5x^2) - (\frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 30x + 10)$$
$$P = -\frac{1}{3}x^3 + 2500x - 10$$

x-ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dP}{dx} = -x^2 + 2500 \qquad \text{----------(1)}$$

பெரும இலாபத்திற்கான நிபந்தனைகள்

$$\frac{dP}{dx} = 0 \text{ மற்றும் } \frac{d^2P}{dx^2} < 0$$

$$\frac{dP}{dx} = 0 \quad \Rightarrow 2500 - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 2500 \text{ அல்லது } x = 50$$

மறுபடியும் (1)-ஐ, x-ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{d^2P}{dx^2} = -2x$$

$x = 50$ எனில், $\frac{d^2P}{dx^2} = -100 < 0$ $\therefore$ P யானது $x = 50$ பெரும மதிப்பை பெறுகின்றனது,

$\therefore$ பெரும இலாபத்தை ஈட்டும் உற்பத்தியின் அளவு $x = 50$ அலகுகள்

$x = 50$ எனில், விலை $p = 2530 - (5 \times 50)$

$= 2530 - 250 =$ ரூ. 2280

4.2.1 சரக்கு நிலை கட்டுப்பாடு (Inventory control)

சரக்கு நிலை கட்டுப்பாடு என்பது எதிர்கால தேவைக்கேற்ப பொருள்களை கையிருப்பு செ–தல் ஆகும். வணிகத்தை சுமூகமாகவும், இலாபகரமாகவும் நடத்தி செல்ல கச்சாப் பொருட்களைச் சேமித்து வைத்தல் இன்றியமையாததாகும்.

4.2.2 சரக்கு நிலை கணக்கில் விலைக்காரணிகளின் பங்கு (Costs involved in inventory problems)

(i) சரக்கு தேக்க செலவு (Inventory carrying cost) C_1

பொருள்களை கையிருப்பு செ–யவதின் தொடர்பாக ஆகும் செலவே சரக்கு தேக்க செலவாகும். இந்த செலவு ஓர் அலகுக்கு ஒரு கால அளவிற்கு என குறிக்கப்படும்.

(ii) குறைபாடு விலை (Shortage cost) C_2

சரக்கு நிலை அமைப்பில் கொள்முதல் செ–யப்படும் ஒரு பொருளானது தீர்ந்து போன பின்னரும் ஏற்படும் தேவையின் அளவினால் இத்தகைய விலைகள் ஏற்படுகின்றன.

(iii) கோருதல் செலவு (Ordering cost) C_3

பொருள்களை வாங்கும்பொழுது பெறும் விலைகள் அல்லது ஒரு தொழிலகத்திற்கு ஏற்படும் ஒரு பொருளின் தேவையானது, அத்தொழிலகத்தாலேயே பூர்த்தி செ–யப்படும்பொழுது ஏற்படும் செலவுகள், கோருதல் செலவு என்று அழைக்கப்படும்.

4.2.3 *மிகு ஆதாய கோருதல் அளவு* (Economic Order Quantity)

வருடாந்திர சரக்குத் தேக்க செலவு மற்றும் நிலைத்த சூழ்நிலையில் வருடாந்திர தேவைக்கேற்ப நிறுவன அமைப்புச் செலவு இவைகளை குறைப்பதற்குத் தகுந்தாற்போல், கோருதல் அளவை, சீர்படுத்துவதே **மிகு ஆதாய கோருதல் அளவு** ஆகும்.

4.2.4 *வில்சனின் மிகு ஆதாய கோருதல் அளவு வா-பாடு*

தேவை தெரிந்தும், குறைபாடுகளின்றியும், சீரானதாகவும் உளபொழுது, பொருளாதார நோக்கின்கீழ் அமைந்த கோருதல் அளவையும், அடுத்தடுத்த சாதகமான இடைவெளிகளில் கோருதல் அளவைத் தீர்மானிப்பதற்கும் இந்த வா–பாடு பயன்படுகிறது.

EOQ-ஐப் பெற பின்வருவனவற்றைக் கருதுவோம்.

(i) ஒரு கால அளவிற்குச் சீரான தேவை R என்க.

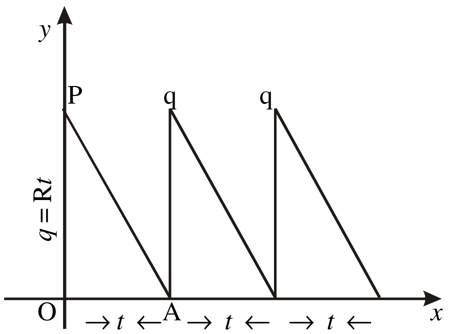
(ii) சரக்கு நிலை உருபடிகளின் அளிப்பு அல்லது உற்பத்தி உடனடியாகப் பெறப்படுகிறது.

(iii) சரக்குத் தேக்கச் செலவு ரூ. C_1.

(iv) ஓர் ஆண்டில் கோரப்படும் எண்ணிக்கை n என்க. ஒவ்வொரு முறையும் q அலகுகள் கோரப்படுகின்றன (உற்பத்தி செ–யப்படுகின்றன).

(v) ஒவ்வொரு கோருதலுக்கும் கோருதல் செலவு ரூ. C_3 அடுத்தடுத்த இரு கோருதல்களுக்கு இடைப்பட்ட கால அளவு t என்க.

இந்த கட்டமைப்பின் விளக்க படமானது கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளது (Model).



படம் 4.5

ஓர் உற்பத்தி ஓட்டமானது t இடைவெளிகளில் அமைகிறது எனில், ஒரு தேவையின் அளவு $q = Rt$ -யானது ஒவ்வொரு ஓட்டத்திற்கும் உற்பத்தி செ–ய வேண்டும். சிறிய கால அளவு dt-இல் கையிருப்பானது $Rt\,dt$. எனவே, t கால அளவில் கையிருப்பு

$$\int_0^t Rt\,dt = \frac{1}{2} Rt^2 = \frac{1}{2} qt \qquad (\because Rt = q)$$

= சரக்கு நிலை முக்கோணம் OAP-ன் பரப்பளவு (படம். 4.5).

ஒவ்வொரு உற்பத்தி ஓட்டத்தின் சரக்குத் தேக்க செலவு = $\frac{1}{2} C_1 Rt^2$.

ஒவ்வொரு உற்பத்தி ஓட்டத்தின் கோருதல் செலவு = C_3.

$\therefore$ ஒவ்வொரு உற்பத்தி ஓட்டத்தின் மொத்த செலவு = $\frac{1}{2} C_1 Rt^2 + C_3$

ஒரு கால அளவிற்கான மொத்த சராசரி செலவு

$$C(t) = \frac{1}{2} C_1 Rt + \frac{C_3}{t} \quad \text{---------}(1)$$

$C(t)$-ஆனது சிறும மதிப்பைப் பெற,

$$\frac{d}{dt} C(t) = 0\,, \quad \frac{d^2}{dt^2} C(t) > 0$$

(1)-ஐ t -யைப் பொறுத்து வகையிட, $\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}$

$$\frac{d}{dt} C(t) = \frac{1}{2} C_1 R - \frac{C_3}{t^2} \quad \text{---------}(2)$$

$$\frac{d}{dt} C(t) = 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{2} C_1 R - \frac{C_3}{t^2} = 0$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}$$

(2)-ஐ t -யைப் பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{d^2}{dt^2} C(t) = \frac{2C_3}{t^3} > 0, \text{ when } t =$$

உகமம் (optimum) கால இடைவெளி $t_o = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}$ -இல்

$C(t)$-ஆனது சிறும மதிப்பைப் பெறுகிறது.

∴ ஒவ்வொரு உற்பத்தி ஓட்டத்திலும் உகமம் அளவு q_0-ஐ உற்பத்தி செ–ய வேண்டும்.

எனவே $q_0 = Rt_0$

∴ மிகு ஆதாய கோருதல் அளவு (EOQ) = $q_0 = R\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}$

இதுவே வில்சனின் மிகு ஆதாய கோருதல் அளவு வா–பாடாகும்.

குறிப்பு

(i) ஓர் ஆண்டிற்கு உகம கோருதலின் எண்ணிக்கை

$$n_0 = \frac{\text{தேவை}}{\text{EOQ}} = R\sqrt{\frac{C_1}{2C_3R}} = \sqrt{\frac{RC_1}{2C_3}} = \frac{1}{t_0}$$

(ii) ஓர் அலகு காலத்தில் சராசரி சிறும செலவு $C_0 = \sqrt{2C_1C_3R}$

(iii) சரக்குத் தேக்கச் செலவு = $\frac{q_0}{2} \times C_1$

கோருதல் செலவு = $\frac{R}{q_0} \times C_3$

(iv) EOQ -இல் கோருதல் செலவும், சரக்கு தேக்கச் செலவும் சமமாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 17

ஒரு நிறுவனத்தார் தன் நுகர்வோருக்கு ஒரு பொருளை ஆண்டுக்கு 12,000 அலகுகள் அளிப்பு செ-கிறார். தேவை தெரிந்தது மற்றும் மாறாதது ஆகும். குறைபாடுகள் அனுமதிக்கப்படுவதில்லை. தேக்கச் செலவு ஒரு மாதத்திற்கு ஒரு அலகுக்கு 20 பைசாக்கள். கோருதல் செலவு ஒரு ஓட்டத்திற்கு ரூ.350 எனில் (i) மிகு ஆதாயக் கோருதல் அளவு q_0 (ii) உகம கால அளவு t_0 (iii) வருடாந்திர சிறும மாறும் செலவு ஆகியனவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

அளிப்பு வீதம் $R = \frac{12000}{12} = 1000$ அலகுகள் / மாதம்

$C_1 = 20$ பைசாக்கள் / அலகு / மாதம்

$C_3 =$ ரூ. 350 / ஓட்டம்

(i) $q_0 = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}} = \sqrt{\frac{2\times350\times1000}{0.20}}$

= 1,870 அலகுகள் / ஓட்டம்.

$t_0 = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}} = \sqrt{\frac{2\times350}{0.20\times1000}}$ = 56 நாட்கள்

(iii) $C_0 = \sqrt{2C_1C_3R} = \sqrt{2\times0.20\times12\times350\times(1000\times12)}$

= ரூ.4,490 / ஆண்டு.

எடுத்துக்காட்டு 18

ஒரு நிறுவனம் வருடத்திற்கு 24,000 அலகுகள் கச்சாப் பொருள்களைப் பயன்படுத்துகிறது. அவைகளில் ஓர் அலகின் விலை ரூ. 1.25. ஒரு கோருதலுக்கான கோருதல் செலவு ரூ. 22.50 ஓர் ஆண்டிற்கு தேக்க செலவு கையிருப்பின் சராசரியில் 5.4% ஆகும் எனில், EOQ, ஒவ்வொரு கோருதலுக்கும் இடைப்பட்ட கால அளவு, வருடாந்திர கோருதலின் எண்ணிக்கை இவைகளைக் காண்க. மேலும் EOQ-இல் சரக்குத் தேக்கச் செலவும், கோருதல், செலவும் சமம் என்பதனைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு :

தேவை = 24,000 அலகுகள் / வருடம்

கோருதல் செலவு(C_3)= ரூ. 22.50

சரக்குத் தேக்க செலவு(C_1)= 5.4% ஓர் அலகின் விலை மதிப்பில்

$= \frac{5.4}{100} \times 1.25$

= 0.0675 / அலகு / வருடம்

$EOQ = \sqrt{\frac{2RC_3}{C_1}} = \sqrt{\frac{2\times2400\times22.5}{0.0675}}$ = 4000 அலகுகள்

ஒவ்வொரு கோருதலுக்கும்

இடைப்பட்ட கால அளவு = $t_o = \frac{q_0}{R} = \frac{4000}{24000} = \frac{1}{6}$ வருடம்

வருடம் ஒன்றுக்கு கோரப்படும் எண்ணிக்கை $= \frac{R}{q_0} = \frac{24000}{4000} = 6$

EOQ-இல் சரக்குத் தேக்க செலவு $= \frac{q_0}{2} \times C_1 = \frac{4000}{2} \times 0.0675 =$ ரூ.135

கோருதல் செலவு $= \frac{R}{q_0} \times C_3 = \frac{24000}{4000} \times 22.50 =$ ரூ.135

$\therefore$ EOQ-இல் கோருதல் செலவு = சரக்குத் தேக்கச் செலவு

எடுத்துக்காட்டு 19

ஒரு தயாரிப்பு நிறுவனம் தன்னுடைய வருடாந்திர தேவைக்காக ஒரு இயந்திரத்திற்கு 9000 உதிரி பாகங்களை வாங்குகிறது. ஒவ்வொரு உதிரி பாகத்தின் விலை ரூ.20. ஒவ்வொரு கோருதலின் கோருதல் செலவு ரூ. 15 ஓர் ஆண்டிற்கு தேக்க செலவானது கையிருப்பின் சராசரியில் 15% ஆகும் எனில்,

(i) EOQ

(ii) ஒவ்வொரு கோருதலுக்கும் இடைப்பட்ட கால அளவு

(iii) வருடாந்திர குறும சராசரி செலவு ஆகியனவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

தேவை R = 9000 உதிரி பாகங்கள் / ஆண்டு

C_1 = 15% அலகின் விலை மதிப்பில்

$= \frac{15}{100} \times 20 =$ ரூ. 3 ஒவ்வொரு உதிரிபாகம் / ஆண்டு

C_3 = ரூ.15 / கோருதல்

$$EOQ = \sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}} = \sqrt{\frac{2\times15\times9000}{3}} = 300 \text{ அலகுகள்}$$

$$t_0 = \frac{q_0}{R} = \frac{300}{9000} = \frac{1}{30} \text{ ஆண்டு}$$

$$= \frac{365}{30} = 12 \text{ நாட்கள்.}$$

சிறும சராசரி $= \sqrt{2C_1C_3R} = \sqrt{2\times3\times15\times9000} =$ ரூ. 900

பயிற்சி 4.2

1) ஒரு குறிப்பிட்ட உற்பத்தி நிறுவனத்தின் மொத்த செலவுச் சார்பு $C = \frac{1}{5}x^2 - 6x + 100$ எனில் மொத்த செலவு எப்பொழுது சிறும மதிப்பைப் பெறும்?

2) ஒரு நிறுவனம் ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளை x-டன்கள் உற்பத்திச் செ–ய ஆகும் மொத்த செலவு $C = 300x - 10x^2 + \frac{1}{3}x^3$ எனில், எந்த உற்பத்தியில் சராசரி செலவு சிறுமம் அடையும் என்பதையும் அந்த நிலையில் சராசரி செலவையும் காண்க.

3) x அலகுகள் உற்பத்தி செ–வதற்கான செலவுச் சார்பு $C = x\,(2e^x + e^{-x})$ எனில், சிறும சராசரி செலவு $2\sqrt{2}$ எனக் காண்க.

4) ஒரு மதிப்புமிக்க உலோகத்தை ஒரு நிறுவனம் மாதத்திற்கு x டன்கள் உற்பத்தி செ–யும்பொழுது அதன் மொத்த செலவுச் சார்பு $C = \text{Rs.}(\frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 75x + 10)$ ஆக உள்ளது. உற்பத்தியின் எந்த அளவிற்கு, அதன் இறுதிநிலைச் செலவு சிறுமம் அடையும்?

5) ஒரு நிறுவனம் ஒரு வாரத்திற்கு x அலகுகள் உற்பத்தி செ–ய ஆகும் மொத்த செலவு ரூ. $(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5x + 3)$ எனில், இறுதிநிலைச் செலவு மற்றும் சராசரி மாறும் செலவு என்பன உற்பத்தியின் எந்த நிலையில் சிறுமமாக இருக்கும்?

6) தொழிலாளர் எண்ணிக்கை x-ம், மொத்த உற்பத்தி செலவு C-ம் $C = \frac{3}{2(x-4)} + \frac{3}{32}x$ என்றவாறு தொடர்புடையன. x-ன் எம்மதிப்பிற்கு செலவு சிறும மதிப்பைப் பெறும்?

7) ஒரு நிறுவனத்தின் மொத்த வருவா– $R = 21x - x^2$ மற்றும் அதன் மொத்த செலவுச் சார்பு $C = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x + 16$. இதில் உற்பத்தி x அலகுகள் விற்கப்படுகிறது எனில்,

   (i) வருவா– பெரும மதிப்பைப் பெறுவதற்கான உற்பத்தி யாது? அந்த புள்ளியில் மொத்த வருவா– யாது?

   (ii) சிறும இறுதி நிலைச் செலவு என்ன?

   (iii) பெரும இலாபம் ஈட்ட உற்பத்தி என்ன?

8) ஒரு நிறுவனத்தின் வருவா– சார்பு $R = 8x$ மற்றும் உற்பத்தியின் செலவு சார்பு $C = 150000 + 60\left(\frac{x^2}{900}\right)$. மொத்த இலாப சார்பையும், பெரும இலாபம் கிடைக்க எத்தனை உற்பத்தி அலகுகள் விற்க வேண்டும் என்பதையும் காண்க.

9) ஒரு வானொலி தயாரிப்பாளர் ஒரு வாரத்திற்கு x வானொலிகளை ஒவ்வொன்றும் ரூ. p வீதம் விற்கிறார். $p = 2(100-\frac{x}{4})$ என கணக்கிடப்படுகிறது. வாரந்தோறும் x வானொலிகளை உற்பத்தி செ–ய ஆகும் உற்பத்தி செலவு ரூ. $(120x+\frac{x^2}{2})$ ஆகும். வாரந்தோறும் 40 வானொலிகள் உற்பத்தி செ–தால் பெரும இலாபத்தை அடையலாம் என காண்க. மேலும் வாராந்திர பெரும இலாபத்யையும் கணக்கிடுக.

10) ஒரு தயாரிப்பாளர் வாரந்தோறும் x உருப்படிகளை $p =$ ரூ.$600 - 4x$ என விற்கிறார். x உருபடிகளை உற்பத்தி செ–ய ஆகும் செலவு $C =$ ரூ.$40x + 2000$. உற்பத்தியானது எந்த அளவில் இருந்தால் பெரும இலாபத்தை ஈட்டலாம்?

11) ஒரு நிறுவனத்தின் மொத்த வருவா–, மொத்த செலவு சார்புகள் முறையே $R = 30x - x^2$ மற்றும் $C = 20 + 4x$. இங்கு x என்பது உற்பத்தி எனில், மீப்பெரு இலாபம் கிடைக்க உற்பத்தியின் அளவு என்ன?

12) பின்வரும் விவரங்களுக்கு, EOQ-வைக் காண்க. EOQ-இல் கோருதல் செலவு = தேக்கச் செலவு என்பதனைச் சரிபார்

உருபடிகள்	மாதாந்திர பண்டத்தின் அளவு	ஒரு கோருதலுக்கு கோருதல் செலவு	ஒரு அலகிற்கு தேக்கச் செலவு
A	9000	ரூ. 200	ரூ. 3.60
B	25000	ரூ. 648	ரூ. 10.00
C	8000	ரூ. 100	ரூ. 0.60

13) கீழ்கண்ட விவரங்களுக்கு EOQ-யையும் மற்றும் மொத்த மாறும் செலவையும் காண்க. கோருதல் செலவு ரூ.5 மற்றும் தேக்கச் செலவு 10% எனக் கொள்க.

உருபடிகள்	வருடாந்திர தேவை	ஓர் அலகின் விலை (ரூ.)
A	460 அலகுகள்	1.00
B	392 அலகுகள்	8.60
C	800 அலகுகள்	0.02
D	1500 அலகுகள்	0.52

14) ஒரு தயாரிப்பாளர் தன்னுடைய நுகர்வோருக்கு ஆண்டுதோறும் தன்னுடைய தயாரிப்பில் 600 அலகுகள் அளிப்பு செ–கிறார். குறைபாடுகள் எதுவும் அனுமதிக்கப்படவில்லை. சரக்கு தேக்கச் செலவு ஒவ்வொரு அலகுக்கும் ஒவ்வொரு ஆண்டும் 60 பைசாக்கள். அமைப்புச் செலவு ரூ. 80 எனில் கீழ்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) EOQ

(ii) சிறும வருடாந்திர சராசரி செலவு

(iii) ஒவ்வொரு வருடத்திற்கும் உகந்த கோருதலின் எண்ணிக்கை

(iv) ஒவ்வொரு உகந்த கோருதலுக்கும் உகந்த அளிப்பு காலம்

15) ஒரு உருப்படியின் வருடாந்திர தேவை 3200 அலகுகள். ஓர் அலகின் விலை ரூ.6 மற்றும் ஒவ்வொரு வருடத்திற்கும் சரக்குத் தேக்கச் செலவு 25%. ஒரு கொள்முதலின் விலை ரூ.150 எனில், (i) EOQ (ii) அடுத்தடுத்த கோருதல்களுக்கு இடைப்பட்ட கால அளவு (iii) வருடாந்திர கோருதலின் எண்ணிக்கை வருடாந்திர சிறும சராசரி செலவு ஆகியனவற்றைக் காண்க.

4.3 பகுதி வகையீடுகள்

இதுவரை வகைக்கெழு காணும்பொழுது $y = f(x)$ என்ற வடிவில் ஒரு மாறிச் சார்பை மட்டும் எடுத்துக்கொண்டோம். ஆனால், ஒரு சார்பினை பல மாறிகளின் சார்பாக அமைக்க முடியும். உதாரணமாக உற்பத்தி சார்பை தொழிலாளர் செலவு, மூலதனம் வாயிலாகவும்; விலைச் சார்பை அளிப்பு, தேவை வாயிலாகவும் வெளிப்படுத்தலாம். பொதுவாக செலவு, இலாபச் சார்புகள் பல சாரா மாறிகளைப் பொருத்தே மதிப்புகளைப் பெறுகின்றன. உதாரணமாக கச்சா பொருள்களின் விலை, தொழிலாளர்களின் ஊதியம், சந்தையின் நிலவரம் என்பது போல பல சாராமாறிகளைப் பெற்று அமைகிறது. எனவே y என்ற சார்ந்த மாறியானது $x_1, x_2, x_3 .. x_n$ என்ற சாரா மாறிகளை பொருத்தே

மதிப்புகளைப் பெற்றிருக்கும். இதனை $y = f(x_1, x_2, x_3 .. x_n)$ எனக் குறிப்போம். இருந்த போதிலும் சாரா மாறிகளை இரண்டு அல்லது மூன்றாகக் குறைத்து அமைந்த சார்புகளை மட்டும் எடுத்துக் கொள்வோம். அதன் வகையீடு செ—யும் முறையைப் பற்றிக் காண்போம்.

4.3.1 வரையறை

$u = f(x, y)$ என்பது x , y எனும் இரண்டு சாரா மாறிகளைக் கொண்ட சார்பு என்க. y-ஐ மாறிலியாகக் கொண்டு, x-ஐ பொறுத்து $u = f(x, y)$-ஐ வகையீடு செ—து கிடைப்பது x-ஐ பொறுத்த u-ன் பகுதி வகைக்கெழு ஆகும். இதை $\frac{\partial u}{\partial x}$, f_x , u_x எனும் குறியீட்டில் குறிப்பது வழக்கம். இதேபோல் y-ஐ பொறுத்து f-ன் பகுதி வகையீடலையும் வரையறுக்கலாம்.

$\therefore$ = இந்த எல்லை இருந்தால்

(இங்கு y என்பது மாறாதது, Δx என்பது x-இல் ஏற்படும் சிறு மாற்றமாகும்)

இதேபால் $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$ இந்த எல்லை இருந்தால் (இங்கு x என்பது மாறாதது, Δy என்பது y-இல் ஏற்படும் சிறு மாற்றமாகும்)

4.3.2 தொடர் பகுதி வகைக் கெழுக்கள்

பொதுவாக, $\frac{\partial f}{\partial x}$ மேலும் என்பன x, y-ன் சார்புகளாக இருக்கும். ஆகையால் நாம் மற்றும் எனும் சார்புகளுக்கு x, y-யைப் பொறுத்து பகுதி வகைக் கெழுக்களைக் காணலாம். இந்த பகுதி வகைக் கெழுக்கள் $f(x, y)$-இன் இரண்டாம் வரிசை பகுதி வகைக் கெழுக்கள் ஆகும். இரண்டாம் வரிசை பகுதி வகைக் கெழுக்களை

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \quad = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \quad = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$$ எனக் குறிப்பது வழக்கம்.

குறிப்பு

$f, \ f_x, f_y$ என்பன தொடர்ச்சியாக இருந்தால், $f_{xy} = f_{yx}$ ஆகும்.

4.3.3 சமபடித்தான சார்புகள் (Homogenous functions)

$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$, $t > 0$ எனில் $f(x, y)$ என்பதை x, y-இல் அமைந்த n படியுள்ள சமபடித்தான சார்பு என்கிறோம்.

4.3.4 சமபடித்தான சார்பிற்கு ஆயிலரின் தேற்றம்

தேற்றம் : f என்பது x, y-இல் அமைந்த n படியுள்ள சமபடித்தான சார்பு எனில்,

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \quad = n \ f.$$

கிளைத் தேற்றம் : பொதுவாக $f(x_1, x_2, x_3 \ldots x_m)$ என்பது x_1, x_2, $x_3 \ldots x_m$, என்ற m மாறிகளால் அமைந்த n படியுள்ள சமபடித்தான சார்பு எனில்,

$$x_1 \quad + x_2 \quad + x_3 \quad + \ldots + x_m \quad = n f.$$

எடுத்துக்காட்டு 20

$u(x, y) = 1000 - x^3 - y^2 + 4x^3y^6 + 8y$, எனில் கீழ்வருவன வற்றைக் காண்க.

(i) **(ii)** **(iii)** **(iv)** $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ **(v)** $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ **(vi)** $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

தீர்வு :

$u(x, y) = 1000 - x^3 - y^2 + 4x^3y^6 + 8y$

(i) $\frac{\partial u}{\partial x} = \quad (1000 - x^3 - y^2 + 4x^3y^6 + 8y)$

$= 0 - 3x^2 - 0 + 4\,(3x^2)y^6 + 0$

$= -3x^2 + 12x^2y^6.$

(ii) $= \quad (1000 - x^3 - y^2 + 4x^3y^6 + 8y)$

$= 0 - 0 - 2y + 4x^3(6y^5) + 8$

$= -2y + 24x^3y^5 + 8$

(iii) $= \frac{\partial}{\partial x}$

$= \frac{\partial}{\partial x}(-3x^2 + 12x^2y^6)$

$= -6x + 12(2x)y^6$

$= -6x + 24xy^{6.}$

(iv) $= \frac{\partial}{\partial y}$

$= \frac{\partial}{\partial y}(-2y + 24x^3y^5 + 8)$

$= -2 + 24x^3(5y^4) + 0$

$=-2 + 120x^3y^4$

(v) $= \frac{\partial}{\partial x}$

$= \frac{\partial}{\partial x}\ (-2y + 24x^3y^5 + 8)$

$= 0 + 24(3x^2)y^5 + 0$

$= 72x^2y^5.$

(vi) $= \frac{\partial}{\partial y}$

$= \frac{\partial}{\partial y}(-3x^2 + 12x^2y^6)$

$= 0 + 12x^2(6y^5) = 72x^2y^5$

எடுத்துக்காட்டு 21

$f(x, y) = 3x^2 + 4y^3 + 6xy - x^2y^3 + 5$ எனில்,

(i) $f_x(1, -1)$ (ii) $f_{yy}(1, 1)$ (iii) $f_{xy}(2, 1)$ இவைகளைக் காண்க.

தீர்வு :

(i) $f(x, y) = 3x^2 + 4y^3 + 6xy - x^2y^3 + 5$

$$f_x = \quad (f) \;=\quad (3x^2 + 4y^3 + 6xy - x^2y^3 + 5)$$
$$= 6x + 0 + 6(1)y - (2x)y^3 + 0$$
$$= 6x + 6y - 2xy^3.$$
$$f_x(1, -1) = 6(1) + 6(-1) - 2(1)(-1)^3 = 2$$

(ii) $f_y = \quad (f) \;=\quad (3x^2 + 4y^3 + 6xy - x^2y^3 + 5)$

$$= 12y^2 + 6x - 3x^2y^2$$

$$f_{yy} \;=$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(12y^2 + 6x - 3x^2y^2)$$
$$= 24y - 6x^2y$$
$$\therefore f_{yy}(1, 1) = 18$$

(iii) $f_{xy} = \qquad = \dfrac{\partial}{\partial x}\,(12y^2 + 6x - 3x^2y^2)$

$= 6 - 6xy^2 \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) x^2 + y^2 + z^2$

$\therefore\; f_{xy}(2, 1) \;= -6$

எடுத்துக்காட்டு 22

$\boldsymbol{u} = \mathbf{log}$ **எனில்**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$ **என நிறுவுக.**

தீர்வு :

$$u = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2 + z^2) \qquad \text{-----------(1)}$$

x-ஐ பொறுத்து பகுதி வகையிட,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \qquad = \frac{(x^2+y^2+z^2)(1)-x(2x)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

y-ஐ பொறுத்து பகுதி வகையிட

$$\frac{\partial u}{\partial y} =$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{(x^2+y^2+z^2)(1)-y(2y)}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{-y^2+z^2+x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

z-ஐப் பொறுத்து பகுதி வகையிட

$$\frac{\partial u}{\partial z} =$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{(x^2+y^2+z^2)(1)-z(2z)}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{-z^2+x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{-x^2+y^2+z^2-y^2+z^2+x^2-z^2+x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

எடுத்துக்காட்டு 23

$u(x, y) = x^3 + y^3 + x^2y$ எனும் சார்புக்கு ஆயிலரின் தேற்றத்தைச் சரிபார்

தீர்வு :

$$u(x, y) = x^3 + y^3 + x^2y \qquad \text{---------}(1)$$

$$u(tx, ty) = t^3x^3 + t^3y^3 + t^2x^2\,(ty)$$

$$= t^3\,(x^3 + y^3 + x^2y) = t^3\,u(x, y)$$

$\therefore$ u என்பது x, y-ல் 3 படி உள்ள சமபடித்தான சார்பு

$x\frac{\partial u}{\partial x}$ $+y$ $= 3u$ என சரிபார்க்க வேண்டும்.

(1)-ஐ x-ஐப் பொறுத்து பகுதி வகையிட

$= 3x^2 + 2xy$

$\therefore \quad x \quad = 3x^3 + 2x^2y$

(1)-ஐ y-ஐ பொறுத்து பகுதி வகையிட

$= 3y^2 + x^2$

$\therefore \quad y \quad = 3y^3 + x^2y$

$\therefore x \quad + y \quad = 3x^3 + 2x^2y + 3y^3 + x^2y$

$= 3(x^3 + x^2y + y^3) = 3u$

எனவே ஆயிலரின் தேற்றம் சரிபார்க்கப்பட்டது

எடுத்துக்காட்டு 24

ஆயிலரின் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி $u = \log$ $\frac{x^4+y^4}{x-y}$ எனில் $x\frac{\partial u}{\partial x}$ $+ y$ $\frac{\partial u}{\partial y}$ $= 3$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$u = \log \qquad \Rightarrow \qquad e^u = \frac{x^4+y^4}{x-y}$

இது x , y-ல் உள்ள **3–**ம் படி சார்பாகும்

$\therefore$ ஆயிலரின் தேற்றத்தின்படி,

$x\frac{\partial}{\partial x}(e^u) + y \quad (e^u) = 3e^u$

$x\, e^u \quad + \; ye^u \quad = 3e^u$

e^u ஆல் வகுக்க கிடைப்பது $x \quad + y \quad = 3$

தொகையீட்டின் பயன்பாடுகள் 5

வரையறுக்கப்பட்ட தொகைகளின் பண்புகள், வடிவ கணித விளக்கம், இறுதி நிலை சார்புகளிலிருந்து மொத்த மற்றும் சராசரி சார்புகளைக் காணுதல் ஆகியனவற்றை இப்பாடப் பகுதியில் காண்போம். மேலும் தேவையின் நெகிழ்ச்சி, விலை கொடுக்கப்படின், தேவையின் சார்பைக் கண்டுபிடித்தல் பற்றியும் காணலாம். இறுதியாக நுகர்வோர் மற்றும் உற்பத்தியாளர்களின் எச்சப்பாடு (surplus) பற்றியும் ஆ–ந்தறிவோம்.

5.1 தொகை நுண்கணிதத்தின் அடிப்படைத் தேற்றம்

$[a, b]$ இல் $f(x)$ ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு. மேலும் $f(x)$ க்கு, $\mathrm{F}(x)$ ஆனது ஒரு முற்படு சார்பு எனில்,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

5.1.1 வரையறுத்த தொகையின் பண்புகள்

1) $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

நிரூபணம் :

$\mathrm{F}(x)$ என்பது $f(x)$ இன் முற்படு சார்பு என்க.

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

$$= -[\mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(b)] = -\int_b^a f(x)\,dx$$

2) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$ இங்கு $a < c < b$.

நிரூபணம் :

a, b, c என்பன மெ–யெண்களைக் குறிக்கட்டும் இங்கு $a < c < b$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{F}(b) - \text{F}(a) \qquad \text{-----(1)}$$

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \text{F}(c) - \text{F}(a) + \text{F}(b) - \text{F}(c)$$

$$= \text{F}(b) - \text{F}(a) \quad \text{-----(2)}$$

(1), (2) லிருந்து $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

நிரூபணம் :

$a + b - x = t$ என்க. $\therefore -dx = dt$

$x = a$ எனில் $t = b$; $x = b$ எனில் $t = a$

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(a+b-t)\,dt$$

$$= \int_a^b f(a+b-t)\,dt \qquad \text{[பண்பு (1) ன் படி]}$$

$$= \int_a^b f(a+b-x)\,dx \qquad \left[\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt\right]$$

4) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

நிரூபணம் :

$a - x = t \qquad \therefore -dx = dt$

$x = 0$ எனில் $t = a$; $x = a$ எனில் $t = 0$

$$\therefore \int_0^a f(x)\,dx = \int_a^0 f(a-t)\,(-dt) = \int_0^a f(a-t)\,dt$$

$$= \int_0^a f(a-x)\,dx$$

5) (i) $f(x)$ ஓர் இரட்டைச் சார்பு எனில், $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

(ii) $f(x)$ ஓர் ஒற்றைச் சார்பு எனில், $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

நிரூபணம் :

(i) f(x) என்பது இரட்டை சார்பு எனில் $f(-x) = f(x)$.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$ [பண்பு (2) ன்படி]

$t = -x$ எனில் $dt = -dx$ [முதல் தொகையில் மட்டும்]

$x = -a$ எனில் $t = a$; $x = 0$ எனில் $t = 0$

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{dx} = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$ [$f(x)$ ஓர் இரட்டைச் சார்பு]

$$= 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(ii) $f(x)$ என்பது ஒற்றைச் சார்பு எனில்

$f(-x) = -f(x)$

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$t = -x$ எனில் $dt = -dx$ [முதல் தொகையில் மட்டும்]

$x = -a$ எனில் $t = a$; $x = 0$ எனில் $t = 0$

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$ [$f(x)$ ஓர் ஒற்றைச் சார்பு]

$= 0$

எடுத்துக்காட்டு 1

மதிப்பிடுக : $\int_{-1}^{1} (x^3 + x)\, dx$

தீர்வு :

$x^3 + x$ என்பது ஓர் ஒற்றைச் சார்பு

$$\therefore \quad \int_{-1}^{1} (x^3 + x)\, dx = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 2

மதிப்பிடுக : $\int_{-2}^{2} (x^4 + x^2)\, dx$

தீர்வு :

$x^4 + x^2$ ஓர் இரட்டைச் சார்பு

$$\therefore \quad \int_{-2}^{2} (x^4 + x^2)\, dx = 2\int_{0}^{2} (x^4 + x^2)\, dx$$

$$= 2\left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2\left[\frac{2^5}{5} + \frac{2^3}{3}\right] = \frac{272}{15}$$

எடுத்துக்காட்டு 3

மதிப்பிடுக : $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin^3 x}}{\sqrt{\sin^3 x} + \sqrt{\cos^3 x}}\, dx$

தீர்வு :

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin^3 x}}{\sqrt{\sin^3 x} + \sqrt{\cos^3 x}}\, dx \qquad \text{-------(1)}$$

பண்பு (4)-ன் படி, $\int_{0}^{a} f(x)\, dx = \int_{0}^{a} f(a-x)\, dx$

மேலும், $$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin^3(\frac{\pi}{2}-x)}}{\sqrt{\sin^3(\frac{\pi}{2}-x)} + \sqrt{\cos^3(\frac{\pi}{2}-x)}}\, dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos^3 x}}{\sqrt{\cos^3 x} + \sqrt{\sin^3 x}}\, dx \qquad \text{---------(2)}$$

$(1) + (2) \Rightarrow$

$$2\text{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin^3 x}+\sqrt{\cos^3 x}}{\sqrt{\sin^3 x}+\sqrt{\cos^3 x}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \ \text{I} =$$

$$\Rightarrow \qquad dx = \frac{\pi}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 4

மதிப்பிடுக : $(1-x)^5\, dx$

தீர்வு :

பண்பு (4)-ன் படி, $\int_0^a f(x)\,\text{dx} = \int_0^a f(a-x)\, dx$

$$\therefore \int_0^1 x\,(1-x)^5\, dx = \int_0^1 (1-x)\,(1-1+x)^5\, dx = \int_0^1 (1-x)\,x^5\, dx$$

$$= \int_0^1 (x^5 - x^6)\,\text{dx} = \left[\frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{42}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin^3 x}}{\sqrt{\sin^3 x}+\sqrt{\cos^3 x}}$$

எடுத்துக்காட்டு 5

மதிப்பிடுக : $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$

தீர்வு :

$$\text{I} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos x}\, dx}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} \qquad \text{--------(1)}$$

பண்பு (3)-ன் படி, $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f\,(a+b-x)\, dx$

$$\therefore\ I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x)}}{\sqrt{\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x)}+\sqrt{\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}-x)}}\,dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}}{\sqrt{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}+\sqrt{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}}\,dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\,dx \qquad \text{--------(2)}$$

$(1) + (2) \Rightarrow$

$$2I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx = [x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{12} \qquad \therefore \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}} = \frac{\pi}{12}$$

பயிற்சி 5.1

வரையறுத்தத் தொகையின் பண்புகளைப் பயன்படுத்தி கீழ்கண்ட தொகைகளின் மதிப்புகளைக் காண்க.

1) $\int_{-10}^{10} (4x^5 + 6x^3 + \frac{2}{3}x)\,dx$ 2) $\int_{-2}^{2} (3x^2 + 5x^4)\,dx$

3) $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$ 4) $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ 5) $\int_{0}^{2} x\sqrt{2-x}\,dx$

6) $\int_{0}^{1} x(1-x)^3\,dx$ 7) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\cot x}}$ 8) $\int_{0}^{2} \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}$

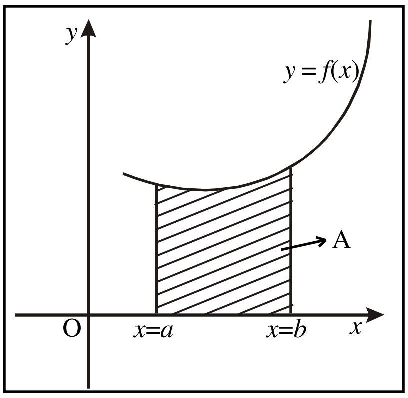
9) $\int_0^{\pi} x\sin^2 x \; dx$ 10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\sin x + b\cos x}{\sin x + \cos x} \; dx$

5.2 வரையறுத்த தொகையின் வடிவ கணித விளக்கம் வளைவரையால் அமையும் பரப்பு

$y = f(x)$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைப்படம் x அச்சு மற்றும் $x = a$, $x = b$ என்ற நிலைத் தொலைவுகள் இவற்றால் அடைபடும் பரப்பளவை

$$A = \int_a^b y \, dx$$

$$= \int_a^b f(x) \, dx$$ எனக் குறிக்கலாம்.



படம் 5.1

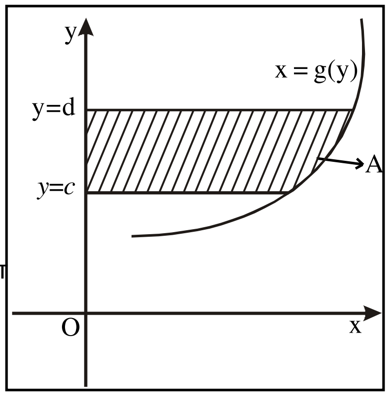
குறிப்பு

$y = f(x)$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைபடம் x அச்சை $x = a$, $x = b$-க்கு இடைப்பட்ட பகுதியை கடக்கக்கூடாது.

இதேபோல், $x = g(y)$ என்ற வளைவரை y அச்சு மற்றும் கிடைத் தொலைவுகள் $y = c$, $y = d$ இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட பரப்பளவு,

$$A = \int_c^d x \, dy$$

$$= \int_c^d g(y) \, dy$$



படம் 5.2

குறிப்பு

$x = g(y)$ என்ற சமன்பாட்டின் வரைபடம் y அச்சில், $y = c$, $y = d$-க்கு இடைப்பட்ட பகுதியின் வழியே செல்லக் கூடாது.

எடுத்துக்காட்டு 6

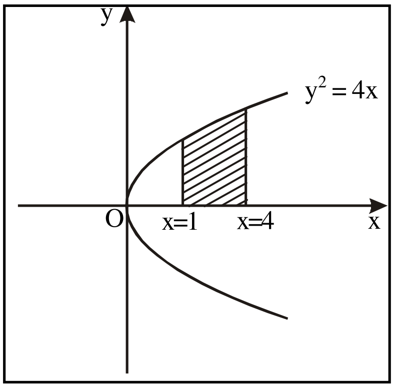
$y^2 = 4x$ என்ற பரவளையத்திற்கும், x அச்சு, $x = 1$ மற்றும் $x = 4$ என்ற கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

தேவையான பரப்பு

$$A = \int_a^b y\, dx = \int_1^4 \sqrt{4x}\, dx$$

$$= 2\int_1^4 \sqrt{x}\, dx = 2\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$



படம் 5.3

$$= 2 \times \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{28}{3}$$ சதுர அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 7

$x^2 = 4y$ என்ற பரவளையத்திற்கும், y அச்சு, மற்றும் $y = 2$, $y = 4$ எனும் கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

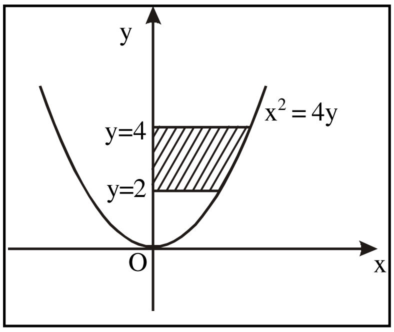
வளைவரையின் கீழ் அமையும் பரப்பு

$$A = \int_c^d x\, dy = \int_2^4 \sqrt{4y}\, dy$$

$$= 2\int_2^4 \sqrt{y}\, dy = 2\left[\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_2^4$$

$$= 2 \times \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{32 - 8\sqrt{2}}{3}$$ சதுர அலகுகள்.



படம் 5.4

எடுத்துக்காட்டு 8

$y = 4x^2 - 8x + 6$ என்ற வளைவரையின், y அச்சு, மற்றும் $x = 2$ இவற்றுக்கு இடையே உள்ள பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

y அச்சின் சமன்பாடு, $x = 0$.எனவே கொடுக்கப்பட்ட வளைவரைக்கும், $x = 0$, $x = 2$ என்ற கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்ட தேவையான பரப்பு,

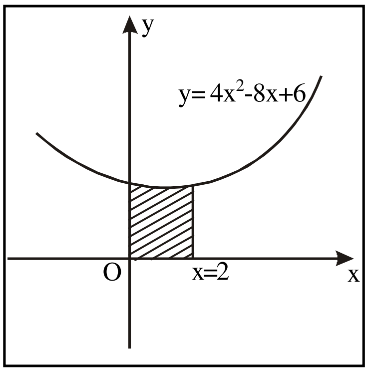
$$A = \int_a^b y\,dx$$

$$= \int_0^2 (4x^2 - 8x + 6)\,dx$$

$$= \left[4\frac{x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} + 6x\right]_0^2$$

$$= \frac{4}{3}(2)^3 - 4(2)^2 + 6(2) - 0$$

$$= \frac{20}{3} \text{ சதுர அலகுகள்.}$$



படம் 5.5

எடுத்துக்காட்டு 9

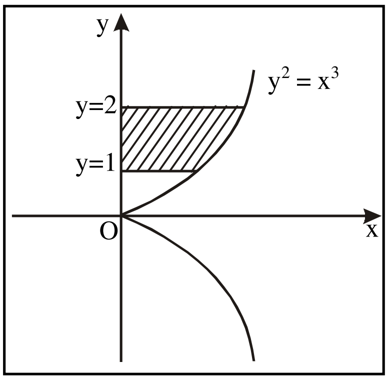
$y^2 = x^3$ எனும் அரைமுப்படி பரவளையம் $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$ எனும் கோடுகளால் அடைபடும் பரப்பினைக் காண்க.

தீர்வு :

தேவையான பரப்பு, $A = \int_c^d x\,dy$

$$= \int_1^2 y^{\frac{2}{3}}\,dy = \left[\frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right]_1^2$$

$$= \frac{3}{5}\left[2^{\frac{5}{3}} - 1\right] \text{ சதுர அலகுகள்.}$$



படம் 5.6

எடுத்துக்காட்டு 10

y = sin ax என்ற வளைவரையின் ஒரு வில்லிற்கும் x அச்சுக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பு காண்க.

தீர்வு :

$y = \sin ax$ வளைவரை x அச்சை வெட்டும் புள்ளி காண $y = 0$ என்க.

எனவே, ஒரு வில்லுக்கான எல்லைகள், $x = 0$, $x = \frac{\pi}{a}$

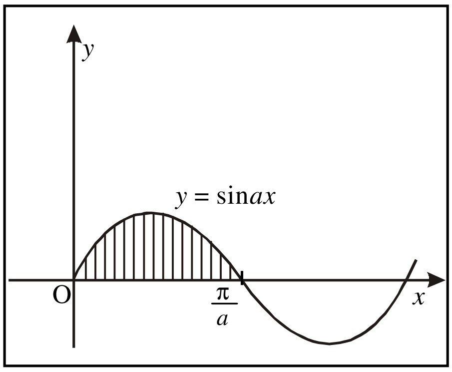
தேவையான பரப்பு,

$$A = \int_a^b y\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{a}} \sin ax\,dx = \left[-\frac{\cos ax}{a}\right]_0^{\frac{\pi}{a}}$$

$$= -\frac{1}{a}\,[\cos\pi - \cos 0]$$

$= \frac{2}{a}$ சதுர அலகுகள்.



படம் 5.7

எடுத்துக்காட்டு 11

$y^2 = x^2\,(4-x^2)$ என்ற வளைவரையின் ஒரே ஒரு சுழல் வளையின் பரப்பைக் காண்க. (எல்லைகள் $x = 0$, $x = 2$).

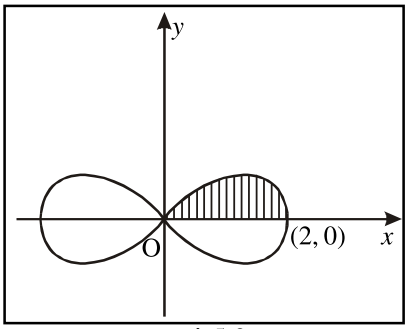
தீர்வு :

வளைவரையின் சமன்பாடு

$y^2 = x^2\,(4-x^2)$

$\therefore\ y = \pm\, x\sqrt{4-x^2}$

தேவையான பரப்பு, $A = \int_a^b y\,dx$



படம் 5.8

= 2 x முதல் கால் பகுதியில் அமையும் பரப்பு

$$= 2\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\ dx$$

$$\therefore \text{A} = 2\int_4^0 \sqrt{t}\ \frac{(-dt)}{2} = \int_0^4 \sqrt{t}\ dt$$

$$= \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{16}{3}$$ சதுர அலகுகள்.

$t = 4 - x^2$ என்க.

$dt = -\ 2xdx$

$-\frac{dt}{2} = xdx.$

$x = 0$ எனில் $t = 4$

$x = 2$ எனில் $t = 0$

பயிற்சி 5.2

1) $y = 4x - x^2$ என்ற வளைவரைக்கும் x அச்சு, $x = 0$ மற்றும் $x = 3$ கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பைக் காண்க.

2) $y = 3x^2 - 4x + 5$ என்ற வளைவரைக்கும் x அச்சு மற்றும் நேர்கோடு $x = 1$, $x = 2$ இவற்றிற்கிடையே அமையும் பகுதியின் பரப்பைக் காண்க.

3) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ எனும் வளைவரைக்கும் $y = 0$ $x = -1$, மற்றும் $x = 1$ கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பினைக் காண்க.

4) $y = \cos x$ என்ற வளைவரையின் ஒரு வில்லுக்கும், $x = -\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ மற்றும் x-அச்சு, இவற்றிற்கு இடையிலுள்ள பரப்பைக் காண்க

5) $y^2 = x^2\ (1-x^2)$ என்ற வளைவரையின் ஒரே ஒரு சுழல் வளையின் $x = 0$, $x = 1$ என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பைக் காண்க

6) $xy = 1$ என்ற தேவை வளைவரைக்கும் $x = 3$, $x = 9$ எனும் கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்ட பரப்புக் காண்க

7) $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்திற்கும் அதன் செவ்வகலத்திற்கும் இடையேயுள்ள பரப்பைக் காண்க.

8) $x = 3y^2 - 9$ எனும் வளைவரைக்கும் கோடுகள் $x = 0$, $y = 0$ மற்றும் $y = 1$ கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்டப் பரப்புக் காண்க..

9) $y =$ என்ற வளைவரையின் x அச்சுக்கு மேல் $x = 1$, $x = 4$ என்ற கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பினைக் காண்க.

10) 'a' அலகு ஆரம் கொண்ட வட்டத்தின் பரப்பைக் காண்க

11) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் பரப்பைக் காண்க

5.3 பொருளாதாரம் மற்றும் வணிகவியலில் தொகையீட்டின் பயன்பாடுகள்

இதற்கு முந்தைய பாடப்பகுதியில் மொத்த செலவுச் சார்பு மொத்த வருவா− சார்பு மற்றும் தேவைச் சார்பு கொடுக்கப்பட்டு இருப்பின் அதற்கான இறுதிநிலை செலவுச் சார்பு, இறுதி நிலை வருவா− சார்பு, தேவை நெகிழ்ச்சி காணும் முறைகளைக் கண்டோம். அதற்கு மாறாக இறுதி நிலை சார்பு கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் மொத்த சார்பைக் காணும் முறையை இங்கு காணலாம்.

5.3.1 இறுதி நிலை செலவுச் சார்பிலிருந்து (Marginal cost function) செலவு, மற்றும் சராசரி செலவுச் சார்புகளைக் (Average cost function) காணுதல்

C என்பது மொத்த செலவுச் சார்பு. இதில் x என்பது உற்பத்தியின் அளவு எனில் இறுதி நிலைச் செலவுச் சார்பு,

$\text{MC} = \frac{dC}{dx}$. தொகை காணல் என்பது வகைக்கெழு முற்படு என்பதால்

செலவு சார்பு, $C = \int (\text{MC})\ dx + k$

இதில் k என்பது தொகை காணலின் மாறிலி. குறிப்பிட்ட அளவு உற்பத்தியின் செலவு கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் அதனைப் பயன்படுத்தி k -இன் மதிப்பு காணலாம்.

சராசரி செலவுச் சார்பு , $\text{AC} = \frac{C}{x}$, $x \neq 0$

எடுத்துக்காட்டு 12

x அலகுகள் உற்பத்தியின் இறுதி நிலை செலவு $\text{MC} = 6 + 10x - 6x^2$ மற்றும் 1 அலகு உற்பத்திக்கான மொத்த செலவு 15, எனில் மொத்த செலவுச் சார்பு மற்றும் சராசரி செலவு ஆகியவற்றை காண்க.

தீர்வு :

இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு,

$$MC = 6 + 10x - 6x^2$$

$$C = \int(MC)\ dx + k = \int(6 + 10x - 6x^2)\ dx + k$$

$$= 6x + \frac{10x^2}{2} - \frac{6x^3}{3} + k$$

$$= 6x + 5x^2 - 2x^3 + k \quad \text{----------(1)}$$

$x = 1,\ C = 15$

$\therefore (1) \Rightarrow 15 = 6 + 5 - 2 + k \Rightarrow 15 - 9 = k \Rightarrow k = 6$

$\therefore$ மொத்த செலவுச் சார்பு , $C = 6x + 5x^2 - 2x^3 + 6$

சராசரி செலவுச் சார்பு , $AC = \frac{C}{x}$

$$= 6 + 5x - 2x^2 + \frac{6}{x}$$

எடுத்துக்காட்டு 13

ஒரு பொருளின் இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு $3x^2 - 2x + 8$. மாறாச் செலவு இல்லை எனில் மொத்த செலவுச் சார்பு மற்றும் சராசரி செலவுச் சார்பு ஆகியவற்றை காண்க.

தீர்வு :

இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு,

$$MC = 3x^2 - 2x + 8$$

$$C = \int(MC)\,dx + k = \int(3x^2 - 2x + 8)\ dx + k$$

$$= x^3 - x^2 + 8x + k \quad \text{-------------- (1)}$$

மாறாச் செலவு இல்லை $\Rightarrow k = 0 \quad \therefore (1) \Rightarrow C = x^3 - x^2 + 8x$

சராசரி செலவுச் சார்பு $AC = \frac{C}{x} = x^2 - x + 8.$

எடுத்துக்காட்டு 14

x அலகு தயாரிப்பதற்கான ஒரு பொருளின் இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு $3 - 2x - x^2$. மாறாச் செலவு 200 எனில் மொத்தச் செலவுச் சார்பு மற்றும் சராசரி செலவுச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு

$$MC = 3 - 2x - x^2$$

$$C = \int (MC)\ dx + k = \int (3 - 2x - x^2)\ dx + k$$

$$= 3x - x^2 - \frac{x^3}{3} + k \qquad \text{---------(1)}$$

$k = 200$ [கொடுக்கப்பட்டுள்ளது]

$$\therefore (1) \Rightarrow C = 3x - x^2 - \frac{x^3}{3} + 200$$

சராசரி செலவுச் சார்பு $AC = \dfrac{C}{x} = 3 - x - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{200}{x}$

5.3.2 கொடுக்கப்பட்டுள்ள இறுதிநிலை வருவா- (Marginal revenue) சார்பிலிருந்து மொத்த வருவா- சார்பு (Revenue function) மற்றும் தேவைச் சார்பு (Demand function) ஆகியவற்றைக் காணுதல் :

R என்பது வருவா– சார்பு எனில் இறுதி நிலை வருவா–ச் சார்பு

$MR = \dfrac{dR}{dx}$. இதில் 'x' என்பது உற்பத்தியின் அளவு இருபுறமும் x ஐப் பொருத்து தொகை காண,

வருவா–ச் சார்பு, $R = \int (MR)\, dx + k$ இதில் k என்பது ஒரு மாறிலி இம்மாறிலியின் மதிப்பை $x = 0$ மற்றும் $R = 0$ எனப்பிரதியிட்டு காணலாம். அதாவது உற்பத்தி இல்லாமல் இருக்கும் போது வருவா– $R = 0$.

வருவா– சார்பு, $R = px$ $\therefore$ தேவைச் சார்பு, $p = \dfrac{R}{x}$, $(x \neq 0)$

எடுத்துக்காட்டு 15

இறுதி நிலை வருவா- சார்பு $MR = 9 - 6x^2 + 2x$ எனில் மொத்த வருவா- சார்பு மற்றும் தேவைச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

இறுதிநிலை வருவா– சார்பு, $MR = 9 - 6x^2 + 2x$

$$R(x) = \int (MR)\ dx + k \quad = \int (9 - 6x^2 + 2x)\ dx + k$$

$$= 9x - \frac{6x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + k \;=\; 9x - 2x^3 + x^2 + k$$

பொருள்கள் விற்பனை இல்லையெனில் வருவா– பூச்சியமாகும் அதாவது $x = 0,\ R = 0$

$$\therefore \quad R = 9x - 2x^3 + x^2$$

தேவைச் சார்பு, $p = \dfrac{R}{x} = 9 - 2x^2 + x$

எடுத்துக்காட்டு 16

இறுதிநிலை வருவா-ச் சார்பு $\mathbf{MR = 3 - 2x - x^2}$ ***எனில் அதன் வருவா-ச் சார்பு மற்றும் தேவைச் சார்பைக் காண்க.***

தீர்வு :

$$MR = 3 - 2x - x^2$$

$$R = \int (MR)\, dx + k = \int (3 - 2x - x^2)\ dx + k$$

$$= 3x - \frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + k \;=\; 3x - x^2 - \frac{x^3}{3} + k$$

பொருள்கள் விற்பனை இல்லை எனில் $R = 0$ அதாவது,

$x = 0$ எனில் $R = 0 \quad \therefore \quad k = 0$

$$\therefore \quad R = 3x - x^2 - \frac{x^3}{3}$$

தேவைச் சார்பு $p = \dfrac{R}{x} = 3 - x - \dfrac{x^2}{3}$

எடுத்துக்காட்டு 17

ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதிநிலை வருவா-ச் சார்பு $\mathbf{= \dfrac{e^x}{100} + x + x^2}$ ***எனில் அதன் வருவா-ச் சார்பைக் காண்க.***

தீர்வு :

$$MR = \frac{e^x}{100} + x + x^2$$

$$R = \int (MR)\, dx + k = \int \left(\frac{e^x}{100} + x + x^2\right) dx + k$$

$$= \frac{e^x}{100} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + k$$

பொருள்கள் விற்பனை இல்லையெனில் $R = 0$

அதாவது $x = 0$ எனில் $R = 0$.

$$\therefore (1) \Rightarrow 0 = \frac{e^0}{100} + 0 + 0 + k \qquad \therefore k = -\frac{1}{100}$$

$$\therefore \text{வருவாய், } R = \frac{e^x}{100} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{100}$$

5.3.3 தேவைநெகிழ்ச்சி (Elasticity of demand) கொடுக்கப் பட்டிருப்பின் வருவாய் மற்றும் தேவைச் சார்பு காணுதல்

$$\text{தேவை நெகிழ்ச்சி } \eta_d = \frac{-p}{x} \frac{dx}{dp}$$

$$\Rightarrow \frac{-dp}{p} = \frac{dx}{x} \frac{1}{\eta_d} \quad -\int \frac{dp}{p} = \frac{1}{\eta_d} \int \frac{dx}{x}$$

இருபுறமும் தொகை காண p எனும் தேவைச் சார்பை x-ன் சார்பாகக் காணலாம்.

வருவாய் சார்பு, $R = px$ என்ற கோட்பாட்டிலிருந்து காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 18

ஒரு பொருளின் தேவை x எனும்பொழுது விலையைப் பொருத்த தேவை நெகிழ்ச்சி $\frac{x-5}{x}$, $x > 5$ எனில், விலை 2 தேவை 7 எனும்பொழுது தேவைச்சார்பு மற்றும் வருவாய்ச் சார்பு காண்க.

தீர்வு :

தேவை நெகிழ்ச்சி , $\eta_d = \frac{x-5}{x}$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

$$\Rightarrow -\frac{p}{x} \frac{dx}{dp} = \frac{x-5}{x} \Rightarrow \frac{dx}{x-5} = -\frac{dp}{p}$$

இருபுறமும் தொகைக்காண,

$$\int \frac{dx}{x-5} = -\int \frac{dp}{p} + \log k \Rightarrow \log(x-5) = -\log p + \log k$$

$$\Rightarrow \log(x-5) + \log p = \log k \Rightarrow \log p(x-5) = \log k$$

$\Rightarrow \quad p(x-5) = k$ ---------(1)

$p = 2$ எனில் $x = 7 \quad \therefore \quad k = 4$

தேவை சார்பு $\quad p = \dfrac{4}{x-5}, \quad x > 5$

வருவாய், $R = px = \dfrac{4x}{x-5}$

எடுத்துக்காட்டு 19

ஒரு பொருளின் விலையைப் பொருத்த தேவை நெகிழ்ச்சி ஒரு மாறிலி. அது 2 க்கு சமம். தேவை 4 எனும் போது விலை 1 எனில் தேவைச் சார்பு மற்றும் வருவாய்ச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

தேவை நெகிழ்ச்சி, $\quad \eta_d = 2$ $\quad$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

$$\Rightarrow \quad -\frac{p}{x}\frac{dx}{dp} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = -2\frac{dp}{p}$$

இருபுறமும் தொகை காண

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = -2\int \frac{dp}{p} + \log k \quad \Rightarrow \quad \log x = -2\log p + \log k$$

$$\log x + \log p^2 = \log k$$

$p^2 x = k$ ---------(1)

தேவை 4 எனில் விலை 1. $\quad x = 4, \quad p = 1$

$$\therefore (1) \Rightarrow 4 = k \quad \text{எனவே } p^2 x = 4 \quad p^2 = \frac{4}{x}$$

$$p = \frac{2}{\sqrt{x}} \;; \quad \text{வருவாய், } R = px = \frac{2x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$$

எடுத்துக்காட்டு 20

ஒரு நிறுவனத்தில் ஒரு பொருளின் இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு மற்றும் இறுதி நிலை வருவாய் முறையே $C'(x) = 4 + 0.08x$ மற்றும் $R'(x) = 12$. உற்பத்தி ஏதும் இல்லாததால் மொத்த செலவு பூச்சியம் எனில் மொத்த இலாபம் காண்க.

தீர்வு :

இறுதி நிலை செலவு,

$$MC = 4 + 0.08x \Rightarrow C(x) = \int (MC)\, dx + k_1$$

$$= \int (4 + 0.08x)\, dx + k_1 = 4x + 0.08\frac{x^2}{2} + k_1$$

$$= 4x + 0.04x^2 + k_1 \quad \text{---------}\ (1)$$

$x = 0$ எனில் $C = 0 \quad \therefore \quad k_1 = 0$

செலவுச் சார்பு $C = 4x + 0.04x^2$ ---------(2)

இறுதி நிலை வருவா−,

$MR = 12.$

$$R(x) = \int MR\, dx + k_2 = \int 12\, dx + k_2 = 12x + k_2$$

விற்பனை இல்லை எனில் வருவா− பூச்சியமாகும்

அதாவது $x = 0$ எனில் $R = 0$.

$\therefore \quad k_2 = 0$

வருவா−, $R = 12x$ ---------(3)

மொத்த இலாபச் சார்பு, $P = R - C$

$= 12x - 4x - 0.04x^2 = 8x - 0.04x^2$.

எடுத்துக்காட்டு 21

ஒரு பொருளின் இறுதிநிலை வருவா-ச் சார்பு (ருபா- ஆயிரங்களில்) $7 + e^{-0.05x}$ (x அலகு என்பது விற்பனையைக் குறிக்கும்) எனில் 100 அலகு விற்பனையில் மொத்த வருவா- காண்க ($e^{-5} = 0.0067$).

தீர்வு :

இறுதி நிலை வருவா−ச் சார்பு $R'(x) = 7 + e^{-0.05x}$

எனவே 100 அலகு விற்பனையில் வருவா− சார்பு,

$$R = \int_0^{100} (7 + e^{-0.05x})\, dx = \left[7x + \frac{e^{-0.05x}}{-0.05}\right]_0^{100}$$

$= 700 - \frac{100}{5}(e^{-5} - 1) = 700 - 20\,(0.0067 - 1)$

$= 700 + 20 - 0.134 = (720 - 0.134)$ ஆயிரங்கள்

$= 719.866 \times 1000$

வருவாய், R = ரூ.7,19,866.

எடுத்துக்காட்டு 22

இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு மற்றும் இறுதி நிலை வருவாய்-சார்பு முறையே $C'(x) = 20 + \frac{x}{20}$, $R'(x) = 30$ நிலையான செலவு ரூ.200 எனில், மீப்பெரு இலாபத்தைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு :

$$C'(x) = 20 + \frac{x}{20} \quad \therefore \quad C(x) = \int C'(x)dx + k_1$$

$$= \int \left(20 + \frac{x}{20}\right) dx + k_1$$

$$= 20x + \frac{x^2}{40} + k_1 \qquad \text{-----------(1)}$$

உற்பத்தி பூச்சியம் எனில் நிலையான செலவு ரூ.200.

அதாவது $x = 0$, $C = 200$,

$\therefore \quad (1) \Rightarrow 200 = 0 + 0 + k_1 \Rightarrow k_1 = 200$

செலவுச் சார்பு $C(x) = 20x + \frac{x^2}{40} + 200$

மொத்த வருவாய், $R'(x) = 30$

$$\therefore R(x) = \int R'(x)\,dx + k_2 = \int 30\,dx + k_2$$

$$= 30x + k_2 \qquad \text{-------------(2)}$$

பொருள்கள் ஏதும் விற்பனை ஆகவில்லையெனில் வருவாய் பூச்சியமாகும்.

அதாவது $x = 0$, $R = 0$ எனில், $(1) \Rightarrow 0 = 0 + k_2$

$\therefore k_2 = 0 \; \therefore \quad R(x) = 30x$

இலாபம், P = மொத்த வருவா– − மொத்த செலவு

$$= 30x - 20x - \frac{x^2}{40} - 200 = 10x - \frac{x^2}{40} - 200$$

$$\frac{dP}{dx} = 10 - \frac{x}{20} \quad ; \frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow x = 200$$

$$\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{-1}{20} < 0$$

$\therefore$ $x = 200$–ல் இலாபம் மீப்பெருமதிப்பை அடையும்.

மீப்பெரு இலாபம், $P = 2000 - \qquad - 200$ = ரூ. 800.

எடுத்துக்காட்டு 23

இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு $C'(x) = 10.6x$. இதில் x என்பது உற்பத்தியின் அளவு. மாறாச் செலவு ரூ.50. ஒரு அலகு உற்பத்தியின் விற்பனை விலை ரூ.5 எனில் (i) மொத்த வருவா-ச் சார்பு (ii) மொத்த செலவுச் சார்பு (iii) இலாப சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

மொத்த செலவுச் சார்பு $C'(x) = 10.6x$

$$\frac{40000}{40}$$

$\therefore$ $$C(x) = \int C'(x)\,dx + k = \int 10.6x\,dx + k = 10.6\frac{x^2}{2} + k$$

$$= 5.3x^2 + k \qquad \text{--------(1)}$$

மாறாச் செலவு = ரூ. 50

அதாவது $x = 0$ எனில் $C = 50$ $\therefore k = 50$

$\therefore$ (1) $\Rightarrow$ செலவுச் சார்பு, $C = 5.3x^2 + 50$

மொத்த வருவா–

= விற்பனை செ–யப்பட்ட அலகுகள் x ஓர் அலகின் விலை

x என்பது விற்பனை அளவு. ஒரு அலகு விற்பனை விலை ரூ.5 எனில் வருவா– $R(x) = 5x$.

(iii) இலாபம், P = மொத்த வருவா– − மொத்தசெலவு

$$= 5x - (5.3x^2 + 50) = 5x - 5.3x^2 - 50.$$

எடுத்துக்காட்டு 24

ஓர் அலகுக்கான ஒரு பொருளின் இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு $C'(x) = \dfrac{x}{3000} + 2.50$ எனில் 3000 அலகுகள் தயாரிக்க ஆகும் செலவைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு :

இறுதி நிலை செலவு , $C'(x) = \dfrac{x}{3000} + 2.50$

$$\therefore \quad C(x) = \int C'(x)\, dx + k = \int \left(\frac{x}{3000} + 2.50\right) dx + k$$

$$= \frac{x^2}{6000} + 2.50x + k.$$

$x = 0$ எனில் $C = 0 \quad \therefore k = 0.$

$$\Rightarrow C(x) = \frac{x^2}{6000} + 2.50x$$

$x = 3000$ எனில், $C(x) = \dfrac{(3000)^2}{6000} + 2.50(3000)$

$$= \frac{9000}{6} + 7500 = 1500 + 7500 = ரூ.9000$$

$\int C'$

$\therefore$ 3000 அலகுகள் தயாரிக்க ஆகும் செலவு = ரூ.9000

எடுத்துக்காட்டு 25

***x* அலகுகள் உற்பத்தி நிலையில் உள்ள இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு $C'(x) = 85 + \dfrac{375}{x^2}$ எனில் 15 அலகுகள் உற்பத்தி செ-தபின் அதிகப்படியாக 10 அலகுகள் உற்பத்தி செ-யத் தேவையான செலவைக் காண்க.**

தீர்வு :

$C'(x) = 85 + \dfrac{375}{x^2} \quad \therefore \; C(x) = \quad (x)\, dx + k$

$= \displaystyle\int_{15}^{25} \left(85 + \frac{375}{x^2}\right) dx$ (15 அலகுகள் உற்பத்திக்கு பின் 10 அலகுகள் அதிகப்படி உற்பத்தி)

$= \left[85x - \frac{375}{x}\right]_{15}^{25} = \left[85(25) - \frac{375}{25}\right] - \left[85(15) - \frac{375}{15}\right]$

$= (2125 - 15) - (1275 - 25) = 2110 - 1250 =$ ரூ. 860.

$\therefore$ 15 அலகுகள் உற்பத்தி செ–தபின் 10 அலகுகள் அதிகப்படியாக உற்பத்தி செ–ய ஆகும் செலவு = ரூ. 860

பயிற்சி 5.3

1) x அலகு உற்பத்தியின் இறுதிநிலைச் செலவுச் சார்பு $MC = 10 + 24x - 3x^2$ மற்றும் 1 அலகு உற்பத்திக்கான மொத்த செலவு ரூ.25 எனில் மொத்தச் செலவுச் சார்பு மற்றும் சராசரி செலவுச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

2) இறுதி நிலைச் செலவுச் சார்பு $MC = \frac{100}{x}$. $C(16) = 100$ எனில் செலவுச் சார்பு மற்றும் சராசரி செலவுச் சார்புகளைக் கண்டுபிடிக்க.

3) ஒரு பொருளின் இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு $MC = 3x^2 - 10x + 3$ இதில் x என்பது உற்பத்தியளவு. 1 அலகு உற்பத்திக்கான செலவு ரூ.7 எனில் மொத்த செலவுச் சார்பு மற்றும் சராசரி செலவுச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

4) இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு $MC = 5 - 6x + 3x^2$, இதில் x என்பது உற்பத்தியளவு. 10 அலகுகள் பொருளை தயாரிக்க ஆகும் செலவு ரூ..850 எனில் மொத்த செலவுச் சார்பு மற்றும் சராசரி செலவுச் சார்பு ஆகியற்றைக் காண்க.

5) இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு $MC = 20 - 0.04x + 0.003x^2$ இதில் x என்பது உற்பத்தியளவு. உற்பத்தியின் நிலையான செலவு ரூ.7,000. எனில் மொத்த செலவுச் சார்பு மற்றும் சராசரி செலவுச் சார்பு ஆகியற்றைக் காண்க.

6) இறுதி நிலை வருவா–ச் சார்பு $R'(x) = 15 - 9x - 3x^2$,எனில் வருவா–ச் சார்பு மற்றும் சராசரி வருவா–ச் சார்பு ஆகியற்றைக் காண்க.

7) ஒரு பொருளின் இறுதி நிலை வருவா–ச் சார்பு $MR = 9 - 2x + 4x^2$, எனில் தேவைச் சார்பு மற்றும் வருவா–ச் சார்பு ஆகியற்றைக் காண்க.

8) இறுதி நிலை வருவா–ச் சார்பு $MR = 100 - 9x^2$ எனில் அதன் மொத்த வருவா–ச் சார்பு மற்றும் தேவைச் சார்புகளைக் கண்டுபிடிக்க.

9) இறுதி நிலை வருவா–ச் சார்பு $MR = 2 + 4x - x^2$ எனில் அதன் மொத்த வருவா– சார்பு மற்றும் தேவை சார்பு ஆகியவற்றை காண்க.

10) ஒரு பொருளின் இறுதி நிலை வருவா–ச் சார்பு $MR = 4 - 3x$. எனில் வருவா– சார்பு மற்றும் தேவை சார்பு ஆகியவற்றை காண்க.

11) ஒரு பொருளின் விலையைப் பொருத்த தேவை நெகிழ்ச்சி $\frac{3-x}{x}$, $x<3$. x என்பது தேவை எனும் போது விலை p ஆகும். விலை 2 மற்றும் தேவை 1 ஆக இருக்கும் போது தேவைச்சார்பு காண்க. மேலும் வருவா–ச் சார்பையும் காண்க.

12) தேவை x எனும்போது விலை p உள்ள ஒரு பொருளின் விலையைப் பொருத்த தேவை நெகிழ்ச்சி $\frac{p}{x^2}$ விலை 3 எனும் போது தேவை 2 எனில் தேவைச் சார்பைக் காண்க.

13) தேவை நெகிழ்ச்சி 1 எனில் அதன் தேவைச் சார்பைக் காண்க.

14) ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு $2 + 3e^{3x}$. இதில் x என்பது உற்பத்தி அளவு. நிலையான செலவு ரூ.500 எனில் மொத்தச் செலவு, சராசரி செலவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

15) இறுதி நிலை வருவா–ச் சார்பு $R'(x)= \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x}$. $R(1) =6$ எனில் வருவா–ச் சார்பு மற்றும் தேவைச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

16) இறுதி நிலை வருவா– சார்பு $R'(x) = 16 - x^2$ எனில், வருவா–ச் சார்பு மற்றும் தேவைச் சார்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

17) ஒரு நிறுவனத்தின் இறுதி நிலைச் செலவு மற்றும் இறுதி நிலை வருவா–ச் சார்பு முறையே $C'(x) = 5 + 0.13x$, $R'(x) = 18$. நிலையான செலவு ரூ.120 எனில் இலாபச் சார்பினைக் காண்க.

18) ஒரு பொருளின் இறுதி நிலை வருவா– (ரூபா– ஆயிரங்களில்) $R'(x) = 4 + e^{-0.03x}$, (x என்பது விற்பனையைக் குறிக்கும்) எனில் 100 அலகு விற்பனையில் மொத்த வருவாயினைக் காண்க ($e^{-3} = 0.05$)

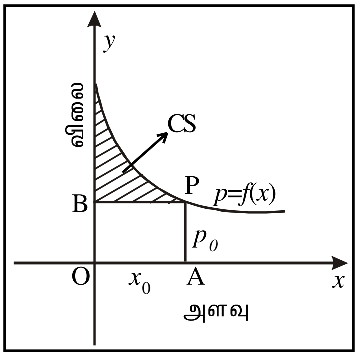
5.4 நுகர்வோரின் எச்சப்பாடு (Consumers' Surplus)

ஒரு விற்பனைப் பொருளின் விலை p ஆக இருக்கும் போது வாங்கப்படும் அப்பொருளின் அளவைக் குறிப்பது தேவையின் வளைவரை ஆகும். சந்தையில் தற்போதைய விலை p_0 என்க. அந்த

விலையில் விற்பனையாகும் பொருளின் அளவு x_0 என்பது தேவை வளைவரையின் அடிப்படையில் தீர்மானிக்கப்படும். எனினும் p_0 விலையை விட அதிகமான விலைக்கு வாங்க விரும்பும் நுகர்வோர்கள் இருக்கக்கூடும். சந்தையில் தற்போதைய நிலவரவிலை p_0 மட்டுமே, இருப்பதால் அத்தகைய நுகர்வோர்கள் ஆதாயமடைவர். இந்த ஆதாயம் "நுகர்வோர் எச்சப்பாடு" எனப்படும். இது $p = f(x)$ என்ற தேவை வளைவரைக்குக் கீழ் $p = p_0$ என்ற கோட்டிற்கு மேல் அமையும் பரப்பைக் குறிக்கும்.

நுகர்வோர் எச்சப்பாடு, CS = [தேவைச் சார்புக்கு கீழ் $x = 0$, $x = x_0$ மற்றும் x அச்சுவரையுள்ள மொத்தப் பரப்பு − OAPB என்ற செவ்வகத்தின் பரப்பு]

$$\therefore \quad CS = \int_0^{x_0} f(x)\,dx - p_0x_0$$



படம் 5.9

எடுத்துக்காட்டு 26

தேவைச் சார்பு $p = 25 - x - x^2$, $p_0 = 19$ எனில் நுகர்வோர் எச்சப்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

தேவைச் சார்பு $p = 25 - x - x^2$

$p_0 = 19$ எனில் $19 = 25 - x - x^2$

$\Rightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 2) = 0$

$\Rightarrow \quad x = 2$ (or) $x = -3$

ஆனால் தேவை குறை எண்ணாக இருக்கமுடியாது.

$\therefore \quad x_0 = 2 \quad \therefore \; p_0\,x_0 = 19 \times 2 = 38$

நுகர்வோர் எச்சப்பாடு, $CS = \int_0^{x_0} f(x)\,dx - p_0x_0$

$$= \int_0^2 (25 - x - x^2)dx - 38 = \left[25x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 - 38$$

$$= [25(2) - 2 - \frac{8}{3}] - 38 = \frac{22}{3} \text{ அலகுகள்}$$

எடுத்துக்காட்டு 27

ஒரு பொருளின் தேவைச் சார்பு $p = 28 - x^2$, $x_0 = 5$ எனில் நுகர்வோர் எச்சப்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

தேவைச் சார்பு, $p = 28 - x^2$

$x_0 = 5$; $p_0 = 28 - 25 = 3$ $\therefore$ $p_0x_0 = 15$

நுகர்வோர் எச்சப்பாடு, $CS = \int_0^{x_0} f(x)\,dx - p_0x_0$

$$= \int_0^5 (28 - x^2)dx - 15 = \left[28x - \frac{x^3}{3}\right]_0^5 - 15$$

$$= [28 \times 5 - \frac{125}{3}] - 15 = \frac{250}{3} \text{ அலகுகள்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 28

ஒரு பொருளின் தேவைச் சார்பு $p = \frac{12}{x+3}$. வியாபாரச் சந்தையில் விலை $p_0 = 2$ எனும் போது நுகர்வோர் எச்சப்பாடு காண்க.

தீர்வு :

தேவைச் சார்பு $p = \frac{12}{x+3}$ மற்றும் $p_0 = 2$ எனில் $2 = \frac{12}{x+3}$

$2x + 6 = 12$ அல்லது $x = 3$ $\therefore$ $x_0 = 3 \Rightarrow p_0x_0 = 6$

$$CS = \int_0^{x_0} f(x)\,dx - p_0x_0 = \int_0^3 \frac{12}{x+3}\,dx - 6$$

$$= 12\,[\log(x+3)]_0^3 - 6 = 12[\log 6 - \log 3] - 6$$

$$= 12 \log \frac{6}{3} - 6 = 12 \log 2 - 6$$

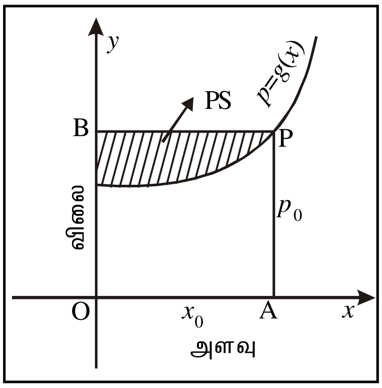
5.5 உற்பத்தியாளரின் எச்சப்பாடு (PRODUCERS' SURPLUS)

சந்தை விலையில் வழங்கும் ஒரு பொருளின் விலை p ஆக இருக்கும் போது வழங்கப்படும் அப்பொருளின் அளவைக் குறிப்பது அளிப்பு வளைவரை ஆகும். சந்தையில் தற்போதைய விலை p_0 என்க. அந்த விலையில் வழங்கப்படும் பொருளின் அளவு x_0 என்பது அளிப்பு வளைவரையில் அடிப்படையில் தீர்மானிக்கப்படும் எனினும் p_0 விலையை விட குறைவான விலைக்கு வழங்க முன்வரும் உற்பத்தியாளர்கள் இருக்கக்கூடும். சந்தையில் தற்போதைய நிலவர விலை p_0 மட்டுமே இருப்பதால் அத்தகைய உற்பத்தியாளர்கள் ஆதாயம் அடைவர். இந்த ஆதாயமே "உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாடு" எனப்படும். இது $p = g(x)$ என்ற அளிப்பு வளைவரைக்கு மேல் $p = p_0$ என்ற கோட்டிற்கு கீழ் அமையும் பரப்பைக் குறிக்கும்.

உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாடு,

PS = [செவ்வகம் OAPB-ன் பரப்பு – அளிப்பு வளைவரைக்கு கீழ் $x = 0$, $x = x_0$ மற்றும் x - அச்சு வரையுள்ள பரப்பு]

$$\therefore \text{PS} = p_0x_0 - \int_0^{x_0} g(x)\,dx$$



படம் 5.10

எடுத்துக்காட்டு 29

ஒரு பொருளின் அளிப்புச் சார்பு $p = x^2 + 4x + 5$ இதில் x என்பது அளிப்பு ஆகும். விலை $p = 10$ எனும்பொழுது உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாடு காண்க.

தீர்வு :

அளிப்புச் சார்பு $p = x^2 + 4x + 5$

$p_0 = 10$ எனில்,

$10 = x^2 + 4x + 5 \quad \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$

$\Rightarrow \quad (x + 5)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = -5 \quad$ or $\quad x = 1$

அளிப்பு குறை எண்ணாக இருக்க முடியாது.

$\therefore\ x = 1 \ \therefore\ \ p_0 = 10,\ x_0 = 1 \ \Rightarrow \quad p_0x_0 = 10$

உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாடு

$$PS = p_0x_0 - \int_0^{x_0} g(x)\,dx \ = \ 10 - \int_0^1 (x^2 + 4x + 5)\,dx$$

$$= 10 - \left[\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 5x\right]_0^1 \ = 10 - [\ \frac{1}{3} + 2 + 5] \ = \ \frac{8}{3} \text{ அலகுகள்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 30

அளிப்புச் சார்பு $p = x^2 + x + 3$-க்கு $x_0 = 4$ எனும்பொழுது உற்பத்தியாளரின் எச்சப்பாடு காண்க.

தீர்வு :

அளிப்புச் சார்பு $p = x^2 + x + 3$

$x_0 = 4$ எனும்போது , $p_0 = 4^2 + 4 + 3 = 23 \ \therefore\ p_0x_0 = 92.$

உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாடு,

$$PS = p_0x_0 - \int_0^{x_0} g(x)\,dx \ = 92 - \int_0^4 (x^2 + x + 3)\,dx$$

$$= 92 - \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x\right]_0^4$$

$$= 92 - [\ \frac{64}{3} + \frac{16}{2} + 12] = \ \frac{152}{3} \text{ அலகுகள்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 31

அளிப்புச் சார்பு $p = 3 + x^2$ க்கு விலை $p = 12$ எனும் போது உற்பத்தியாளரின் எச்சப்பாடு காண்க.

தீர்வு :

அளிப்புச் சார்பு, $p = 3 + x^2$

$p_0 = 12$ எனில் $12 = 3 + x^2$ or $x^2 = 9$ or $x = \pm 3$

அளிப்பு குறை எண்ணாக இருக்க முடியாது.

$\therefore \quad x_0 = 3 \ \therefore\ p_0x_0 \ = 36.$

உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாடு PS $= p_0x_0 - \int_0^{x_0} g(x)\,dx$

$$= 36 - \int_0^3 (3 + x^2)\, dx = 36 - \left[3x + \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 18 \text{ அலகுகள்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 32

ஒரு போட்டி வியாபாரத்தில் தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்புகள் முறையே $p_d = 16 - x^2$ மற்றும் $p_s = 2x^2 + 4$. சமான விலையில் நுகர்வோர் எச்சப்பாடு மற்றும் உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாடு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

ஒரு போட்டி வியாபாரத்தில் வியாபாரச் சந்;தை சமான நிலை காண, தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்பு ஆகியவற்றை சமப்படுத்த வேண்டும்.

$\Rightarrow\ 16 - x^2 = 2x^2 + 4 \Rightarrow 3x^2 = 12$

$\Rightarrow\quad x^2 = 4 \qquad \Rightarrow\ x = \pm 2$ ஆனால் $x = -2$ சாத்தியமில்லை

$\therefore x = 2 \qquad \Rightarrow\ x_0 = 2$

$\therefore\ p_0 = 16 - (2)^2 = 12 \quad \therefore\quad p_0 x_0 = 12 \times 2 = 24.$

நுகர்வோரின் எச்சப்பாடு

$$\text{CS} = \int_0^{x_0} f(x)\, dx - p_0 x_0 = \int_0^2 (16 - x^2)\, dx - 24$$

$$= \left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 - 24 = 32 - \frac{8}{3} - 24 = \frac{16}{3} \text{ அலகுகள்.}$$

உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாடு

$$\text{PS} = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} g(x)\, dx = 24 - \int_0^2 (2x^2 + 4)\, dx$$

$$= 24 - \left[\frac{2x^3}{3} + 4x\right]_0^2 = 24 - \frac{2 \times 8}{3} - 8$$

$$= \frac{32}{3} \text{ அலகுகள்.}$$

பயிற்சி 5.4

1) தேவைச் சார்பு $p = 35 - 2x - x^2$ எனில் தேவை $x_0 = 3$ எனும்போது நுகர்வோர் எச்சப்பாடு காண்க.

2) ஒரு பொருளின் தேவைச் சார்பு $p = 36 - x^2$, $p_0 = 11$ எனில் நுகர்வோர் எச்சப்பாடு காண்க.

3) ஒரு பொருளின் தேவைச் சார்பு $p = 10 - 2x$ எனில் (i) $p = 2$ (ii) $p = 6$ எனும்போது நுகர்வோர் எச்சப்பாடு காண்க.

4) $p = 80 - 4x - x^2$ என்ற தேவைச் சார்பின் $p = 20$ எனும் போது நுகர்வோர் எச்சப்பாடு காண்க.

5) அளிப்புச் சார்பு $p = 3x^2 + 10$ மற்றும் $x_0 = 4$ எனில் உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாட்டைக் காண்க.

6) அளிப்பு விதி $p = 4 - x + x^2$ -க்கு விலை p = 6 எனும் போது உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாட்டைக் காண்க.

7) ஒரு பொருளின் அளிப்புச் சார்பு $p = 3 + x$ எனில் (i) $x_0 = 3$ (ii) $x_0 = 6$ எனும்போது உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாடு காண்க.

8) ஒரு பொருளின் அளிப்புச் சார்பு $p = \frac{x^2}{2} + 3$ மற்றும் $P_0 = 5$ எனில் உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாட்டைக் காண்க.

9) தேவைச் சார்பு $p_d = 16-2x$ மற்றும் அளிப்புச் சார்பு $p_s = x^2 + 1$ எனில் வியாபாரச் சந்தையின் சமான நிலையின் கீழ் உற்பத்தியாளர் மற்றும் நுகர்வோர் எச்சப்பாடுகளைக் காண்க.

10) சரியான போட்டியின் கீழ் ஒரு பொருளின் தேவை மற்றும் அளிப்பு விதிகள் ஆகியன முறையே $p_d = 23 - x^2$ மற்றும் $p_s = 2x^2 - 4$ விலை சமான நிலையில் இருக்கும்போது நுகர்வோர் எச்சப்பாடு, மற்றும் உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாடுகளைக் காண்க.

11) சரியான போட்டியின் கீழ் ஒரு பொருளின் தேவை மற்றும் அளிப்பு விதிகள் ஆகியன முறையே $p_d = 56 - x^2$ மற்றும் $p_s = 8 + \frac{x^2}{3}$. விலை சமான நிலையில் இருக்கும்போது நுகர்வோர் எச்சப்பாடு மற்றும் உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாடுகளைக் காண்க.

12) ஒரு பொருளின் தேவை மற்றும் அளிப்பு ஆகியவற்றின் சார்புகள் $p_d = 20 - 3x - x^2$ மற்றும் $p_s = x - 1$ எனில் வியாபாரச் சந்தையின் சமான நிலையின் கீழ் உற்பத்தியாளர் மற்றும் நுகர்வோர் எச்சப்பாடுகளைக் காண்.

13) தேவைச் சார்பு $p_d = 40- x^2$ மற்றும் அளிப்புச் சார்பு $p_s = 3x^2 + 8x +8$ எனில் வியாபாரச் சந்தையில் சமான நிலையின் கீழ் உற்பத்தியாளர் மற்றும் நுகர்வோர் எச்சப்பாடுகளைக் காண்.

14) ஒரு பொருளின் தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்புகள் $p_d = 15 - x$ மற்றும் $p_s = 0.3x + 2$ எனில் வியாபரச் சந்தையில் சமான நிலையின் கீழ் உற்பத்தியாளர் மற்றும் நுகர்வோர் எச்சப்பாடுகளைக் காண்க.

15) தேவை மற்றும் அளிப்புச் சார்புகளின் வளைவரைகள் $p_d = \frac{16}{x+4}$ மற்றும் $p_s = \frac{x}{2}$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. வியாபாரச் சந்தையில் சமான நிலையின் கீழ் நுகர்வோர் மற்றும் உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாடுகளைக் காண்க.

பயிற்சி 5.5

ஏற்புடைய விடையைத் தெரிவு செ-க

1) $f(x)$ ஒரு ஒற்றை சார்பு எனில் $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx =$

(a) 1 (b) 2a (c) 0 (d) a

2) $f(x)$ ஒரு இரட்டைச் சார்பு எனில் $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx =$

(a) $2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ (b) $\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ (c) $-2a$ (d) 2a

3) $\int_{-3}^{3} x\,dx =$

(a) 0 (b) 2 (c) 1 (d) -1

4) $\int_{-2}^{2} x^4\,dx =$

(a) $\frac{32}{5}$ (b) $\frac{64}{5}$ (c) $\frac{16}{5}$ (d) $\frac{8}{5}$

5) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx =$

(a) 0 (b) -1 (c) 1 (d) $\frac{\pi}{2}$

6) $dx =$

(a) 2 (b) −2 (c) −1 (d) 1

7) $y = f(x)$ என்ற வளைவரை x-அச்சு மற்றும் நிலைத் தொலைவுகள் $x = a$, $x = b$ இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட பரப்பு

(a) $\int_a^b y\ dx$ (b) $\int_a^b y\ dy$ (c) $\int_a^b x\ dy$ (d) $\int_a^b x\ dx$

8) $x = g(y)$ என்ற வளைவரை, y - அச்சு மற்றும் கோடுகள், $y = c$, y = d இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட பரப்பு

(a) $\int_c^d y\ dy$ (b) $\int_c^d x\ dy$ (c) $\int_c^d y\ dx$ (d) $\int_c^d x\, dx$

9) $y = e^x$ என்ற வளைவரைக்கும் x - அச்சு, கோடுகள் $x = 0$ மற்றும் $x = 2$ இவற்றால் அடைபடும் பரப்பு

(a) e^2-1 (b) e^2+1 (c) e^2 (d) e^2-2

10) $y = x$, y -அச்சு மற்றும் $y = 1$ எனும் கோடுகளால் அடைபடும் பரப்பு

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) log 2 (d) 2

11) $y = x + 1$ எனும் கோடு, x -அச்சு $x = 0$ மற்றும் $x = 1$ இவற்றால் அடைபடும் பரப்பு

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 2 (c) $\frac{3}{2}$ (d) 1

12) $xy = 1$ என்ற வளைவரைக்கும் x -அச்சு, $x = 1$ மற்றும் $x = 2$ க்கும் இடைப்பட்ட பரப்பு

(a) log 2 (b) log $\frac{1}{2}$ (c) 2 log 2 (d) $\frac{1}{2}$ log 2

13) இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு MC = $3e^{3x}$ எனில் செலவுச் சார்பு

(a) $\frac{e^{3x}}{3}$ (b) e^{3x}+k (c) $9e^{3x}$ (d) $3e^{3x}$

14) இறுதி நிலை செலவுச் சார்பு MC = 2 - 4x எனில் செலவுச் சார்பு

(a) $2x-2x^2$+k (b) $2-4x^2$ (c) $\frac{2}{x}-4$ (d) $2x - 4x^2$

15) இறுதி நிலை வருவா− சார்பு MR = 15 − 8x எனில் வருவா− சார்பு

(a) $15x-4x^2$+k (b) $\frac{15}{x}-8$ (c) −8 (d) $15x - 8$

16) இறுதி நிலை வருவா– சார்பு $R'(x) = \frac{1}{x+1}$ எனில் வருவா–ச் சார்பு

(a) $\log |x+1| + k$ (b) $-\frac{1}{(x+1)}$ (c) $\frac{1}{(x+1)^2}$ (d) $\log \frac{1}{x+1}$

17) தேவைச் சார்பு $p = f(x)$-ல் x_0 தேவை, p_0 -விலை எனும் போது நுகர்வோர் எச்சப்பாடு

(a) $\int_0^{x_0} f(x)\,dx - p_0 x_0$ (b) $\int_0^{x_0} f(x)\,dx$

(c) $p_0 x_0 - \int_0^{x_0} f(x)\,dx$ (d) $\int_0^{p_0} f(x)\,dx$

18) அளிப்புச் சார்பு $p = g(x)$-ல் x_0 அளிப்பு p_0 விலை எனும் போது உற்பத்தியாளர் எச்சப்பாடு

(a) $\int_0^{x_0} g(x)\,dx - p_0 x_0$ (b) $p_0 x_0 - \int_0^{x_0} g(x)\,dx$

(c) $\int_0^{x_0} g(x)\,dx$ (d) $\int_0^{p_0} g(x)\,dx$

விடைகள்

அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள்

பயிற்சி 1.1

1) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

9) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 10) 11) $\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3} \end{pmatrix}$

13) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$ 18) 4, −2 19) −1, 0 20) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

பயிற்சி 1.2

1) (i) 3 (ii) 2 (iii) 1 (iv) 3 (v) 2 (vi) 3 (vii) 1 (viii) 2 (ix) 2

2) 2, 0. 6) ஒப்புமைத் தன்மை அற்றவை.

$\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 0 & -a \\ 0 & 1 & b \\ 0 \end{pmatrix}$

11) $k = -3$ 12) k ஆனது 0 அல்லாத ஏதேனும் ஒரு மெ–யெண்

13) $k = -3$ 14) k ஆனது 8 அல்லாத ஏதேனும் ஒரு மெ–யெண்

பயிற்சி 1.3

1) 2, 1. 2)0, 1, 1. 3) 5, 2. 4) 2, -1, 1.

5) 0, 2, 4. 6) 20, 30. 7) ரூ..2, ரூ.3, ரூ.5.

8) ரூ.1, ரூ.2, ரூ.3. 9) 11 டன்கள், 15 டன்கள், 19 டன்கள்.

பயிற்சி 1.4

1) $\begin{array}{c|cccc} & 6 & 8 & 9 & 12 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$

2) $\begin{array}{c|cccc} & 2 & 4 & 6 & 9 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$

3) $\{(a, l), (b, m), (c, m)\}$ 4) $\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$

5) $\begin{array}{c|ccc} & 4 & 3 & 8 \\ \hline 3 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ 9 & 1 & 1 & 1 \end{array}$, $\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 5 \\ \hline 4 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{array}$, $\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}$ 6) $\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$; சமான உறவு

7) $\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$; சமனி உறவு, சமச்சீர் உறவு அல்ல, தொடர் உறவு

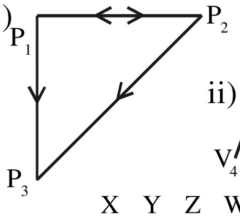
8) $\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$; சமனி உறவு அல்ல, சமச்சீர் உறவு தொடர் உறவு

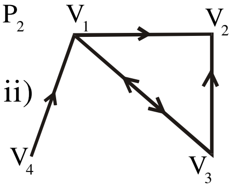
9) $\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$; சமனி உறவு அல்ல, சமச்சீர் உறவு, தொடர் உறவு அல்ல.

10) (i) $\begin{array}{c|ccc} & P_1 & P_2 & P_3 \\ \hline P_1 & 0 & 0 & 0 \\ P_2 & 0 & 0 & 0 \\ P_3 & 1 & 1 & 0 \end{array}$ (ii) $\begin{array}{c|cccc} & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ \hline P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ P_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ P_4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$ (iii) $\begin{array}{c|ccc} & P_1 & P_2 & P_3 \\ \hline P_1 & 0 & 1 & 0 \\ P_2 & 0 & 0 & 0 \\ P_3 & 0 & 1 & 0 \end{array}$

(iv) $\begin{array}{c|cccc} & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ \hline P_1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ P_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ P_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$ (v) $\begin{array}{c|cccccc} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 \\ \hline V_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ V_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ V_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ V_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ V_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$ (vi) $\begin{array}{c|cccc} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ \hline V_1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ V_2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ V_3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ V_4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$

11)

i) 

ii) 

12) 3, CBA, CDA, CDBA

13) (i) $\begin{array}{c} \\ X \\ Y \\ Z \\ W \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} X & Y & Z & W \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ (ii) வலுவாக இணைக்கப்படவில்லை

(iii) $\begin{array}{c} \\ X \\ Y \\ Z \\ W \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} X & Y & Z & W \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ 14) (i) $\begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

(ii) 2, $V_2\, V_1\, V_4\, V_3$, $V_2\, V_3\, V_4\, V_3$.

(iii) 5, $V_2\, V_1\, V_4\, V_1\, V_4$,
$V_2\, V_1\, V_4\, V_3\, V_4$,
$V_2\, V_4\, V_3\, V_1\, V_4$,
$V_2\, V_3\, V_4\, V_1\, V_4$,
$V_2\, V_3\, V_4\, V_3\, V_4$.

(iv) 4, $V_4\, V_1$, $V_4\, V_3\, V_1$, $V_4\, V_3\, V_4 V_1$, $V_4\, V_1\, V_4\, V_1$.

(v) 13 (vi) வலுவாக இணைக்கப்படவில்லை (vii) $\begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

15) $\begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ 17) $\begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$; $\begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

$$18)\ \begin{array}{c|cccc} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ V_1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ V_2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ V_3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ V_4 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad 19)\ \begin{array}{c|cccc} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ V_1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ V_2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ V_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ V_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \ ; \ \begin{array}{c|cccc} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\ V_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ V_2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ V_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ V_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

20) (i) 24, 21, 61, 47, 76, 55, 33, 28 (ii) THURSDAY

பயிற்சி 1.5

1) செயல்படும் வகையில் உள்ளது 2) செயல்படும் வகையில் இல்லை

3) 110 அலகுகள், 320 அலகுகள். 4) ரூ. 72 மில்லியன், ரூ.96 மில்லியன்.

5) (i) ரூ. 42 இலட்சங்கள், ரூ. 78 இலட்சங்கள்

(ii) ரூ.28 இலட்சங்கள், ரூ.52 இலட்சங்கள்.

6) ரூ. 80 மில்லியன்கள், ரூ. 120 மில்லியன்கள்.

7) ரூ. 1200 கோடி, ரூ. 1600 கோடி. 8) ரூ. 7104 கோடி, ரூ. 6080 கோடி.

பயிற்சி 1.6

1) 74.8%, 25.2% ; 75%, 25% 2) 39% 3) 54.6%, 45.4%

பயிற்சி 1.7

1) c 2) b 3) c 4) c 5) a 6) a 7) b 8) b
9) b 10) c 11) a 12) a 13) a 14) a 15) a 16) b
17) a 18) b 19) d 20) b

பகுமுறை வடிவ கணிதம்

பயிற்சி 2.1

1) பரவளையம் 2) அதிபரவளையம் 3) நீள்வட்டம்

பயிற்சி 2.2

1) (a) $x^2 + y^2 - 2xy - 4y + 6 = 0$
(b) $x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4y + 4 = 0$
(c) $4x^2 + 4xy + y^2 - 4x + 8y - 4 = 0$
(d) $x^2 + 2xy + y^2 - 22x - 6y + 25 = 0$

2) (a) (0, 0), (0, 25), $x = 0$, $y + 25 = 0$
(b) (0, 0), (5, 0), $y = 0$, $x + 5 = 0$
(c) (0, 0), (−7, 0), $y = 0$, $x - 7 = 0$
(d) (0, 0), (0, −15), $x = 0$, $y + 15 = 0$

3) (a) $(-\frac{1}{2}, 1), (-\frac{3}{2}, 1)$, $2x - 1 = 0$, 4
(b) (−1, −1), (0, -1), $x + 2 = 0$, 4

(c) $(-\frac{9}{8}, 0), (\frac{7}{8}, 0)$, $8x + 25 = 0$, 8

(d) $(0, 1), (0, -\frac{7}{4})$, $4y - 1 = 0$, 3 4) 15 டன்கள், ரூ.40

பயிற்சி 2.3

1) (i) $101x^2 + 48xy + 81y^2 - 330x - 324y + 441 = 0$

(ii) $27x^2 + 20y^2 - 24xy + 6x + 8y - 1 = 0$

(iii) $17x^2 + 22y^2 + 12xy - 58x + 108y + 129 = 0$

2) (i) $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{128} = 1$ (ii) $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{15} = 1$ (iii) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

3) (i) $(0, 0), (0, \pm 3)$; $\frac{\sqrt{5}}{3}$; $(0, \pm\sqrt{5})$; $\frac{8}{3}$

(ii) $(1, -5), (1, \pm\sqrt{7} - 5)$; $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$; $(1, \pm\sqrt{3} - 5)$; $\frac{8}{\sqrt{7}}$

$y = \frac{7}{\sqrt{3}} - 5$, $y = \frac{-7}{\sqrt{3}} - 5$,

(iii) $(-2, 1), (2, 1)$ $(-6, 1)$; ; $(\pm\sqrt{7} - 2, 1)$; $\frac{9}{2}$

$x = \frac{16}{\sqrt{7}} - 2$, $x = \frac{-16}{\sqrt{7}} - 2$,

பயிற்சி 2.4 $\frac{\sqrt{7}}{4}$

1) (a) $19x^2 + 216xy - 44y^2 - 346x - 472y + 791 = 0$

(b) $16(x^2 + y^2) = 25(x\cos\alpha + y\sin\alpha - p)^2$

2) $12x^2 - 4y^2 - 24x + 32y - 127 = 0$

3) (a) $16x^2 - 9y^2 - 32x - 128 = 0$

(b) $3x^2 - y^2 - 18x + 4y + 20 = 0$

(c) $3x^2 - y^2 - 36x + 4y + 101 = 0$

4) (a) $(0, 0)$; $\frac{5}{4}$; $(\pm 5, 0)$; $5x \pm 16 = 0$

(b) $(-2, -4)$; $\frac{4}{3}$; $(2, -4)$ $(-6, -4)$; $4x - 1 = 0$, $4x + 17 = 0$

(c) $(1, 4)$; 2; $(6, 4)$ $(-4, 4)$; $4x - 9 = 0$, $4x + 1 = 0$

5) (a) $3x + y + 2 = 0$, $x - 2y + 5 = 0$;

(b) $4x - y + 1 = 0$, $2x + 3y - 1 = 0$

6) $4x^2 - 5xy - 6y^2 - 11x + 11y + 57 = 0$

7) $12x^2 - 7xy - 12y^2 + 31x + 17y = 0$

பயிற்சி 2.5

1) a	2) b	3) c	4) d	5) c	6) a	7) c	8) b
9) b	10) a	11) b	12) c	13) b	14) b	15) a	16) c
17) a	18) c	19) c	20) c				

வகையீட்டின் பயன்பாடுகள்-I

பயிற்சி 3.1

1) (i) $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 25 + \frac{8}{x}$ (ii) $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 25$

(iii) $\frac{8}{x}$. AC = ரூ.35.80, AVC = ரூ.35, AFC = ரூ.0.80

2) ரூ.600.05 3) ரூ.5.10 4) ரூ.1.80 5) ரூ.1.50, ரூ.1406.25

6) (i) $\frac{1}{10}x^2 - 4x + 8 + \frac{4}{x}$ (ii) $\frac{3}{10}x^2 - 8x + 8$ (iii) $\frac{1}{5}x - 4 - \frac{4}{x^2}$

7) ரூ.**55**, ரூ.23 8) ரூ.119 10) 0.75 11) 1.15

13) (i) (ii) $\frac{3}{2}$ 14) m 15) $\frac{4p^2}{3p^2+5}$ 16) $\frac{p}{2(p-b)}$

$\frac{3p^2+8p+30}{2(p+2)}$

17) AR = p, MR = $550 - 6x - 18x^2$

18) (i) R = $20,000\,x\,e^{-0.6x}$ (ii) MR = $20,000\,x\,e^{-0.6x}\,[1 - 0.6x]$

19) $\frac{4p+2p^2}{30-4p-p^2}$, 20) 20, 3 21) ரூ.110 22) $\frac{30}{11}$, ரூ.1.90

பயிற்சி 3.2

1) −1.22, −1.25 2) -1 அலகு / வினாடி 3) 12 அலகு / வினாடி

5) (i) வருமானம் மாதத்திற்கு ரூ.40,000 வீதம் கூடுகிறது.
(ii) செலவு மாதத்திற்கு ரூ.4,000 வீதம் கூடுகிறது.
(iii) இலாபம் மாதத்திற்கு ரூ.36,000 வீதம் கூடுகிறது.

6) (i) வருமானம் வாரத்திற்கு ரூ.48,000 வீதம் கூடுகிறது.
(ii) செலவு வாரத்திற்கு ரூ.12,000 வீதம் கூடுகிறது.
(iii) இலாபம் வாரத்திற்கு ரூ.36,000 வீதம் கூடுகிறது.

8) 10π செ.மீ^{2} / வினாடி 9) 115π செ.மீ^{3} / நிமிடம் 10) $x = \frac{1}{3}$, 3.

பயிற்சி 3.3

1) $\frac{10}{3}, \frac{-13}{5}$ 2) $a = 2,\ b = 2$ 4) (i) $x - y + 1 = 0,\ x + y - 3 = 0$

(ii) $2x - 2y + \quad - \frac{\pi}{3} = 0;\ 2x + 2y - \quad - \frac{\pi}{3} = 0$

(iii) $3x + 2y + 13 = 0$; $2x - 3y = 0$

(iv) $9x + 16y - 72 = 0;\ 64x - 36y - 175 = 0$

(v) $3ex - y - 2e^2 = 0;\ x + 3ey - 3e^3 - e = 0$

(vi) $bx + \sqrt{2}\,ay - 2ab = 0;\ \sqrt{2}\,ax - \sqrt{2}\,by - a^2 + b^2 = 0$

5) $13x - y - 34 = 0;\ x + 13y - 578 = 0$

6) $10x + y - 61 = 0;\ x - 10y + 105 = 0$

7) $(1, \frac{1}{3}), (-1, \frac{-1}{3})$ 9) $x - 20y - 7 = 0; 20x + y - 140 = 0$

11) $\sec\theta - \frac{y}{b}\tan\theta = 1;$ $\frac{ax}{\sec\theta} + \frac{by}{\tan\theta} = a^2 + b^2.$

12) (i) (1, 0) மற்றும் (1, 4) (ii) (3, 2) மற்றும் (-1, 2)

$\sqrt{3}$ 2

a

பயிற்சி 3.4

1) d	2) c	3) a	4) a	5) b	6) c	7) d
8) d	9) b	10) a	11) d	12) a	13) b	14) c
15) b	16) d	17) c	18) a	19) a	20) c	

வகையீட்டின் பயன்பாடுகள்-II

பயிற்சி 4.1

3) $(-\infty, -5)$ மற்றும் $(-\frac{1}{3}, \infty)$ இல் கூடும், $(-5, -\frac{1}{3})$ இல் குறையும்

4) $(-2, 27),\ (1, 0)$

5) (i) R என்பது $0 < x < 4$ இல் கூடும், $x > 4$ க்கு குறையும். MR என்பது $0 < x < 2$ இல் கூடும் $x > 2$ க்கு குறையும்.

(ii) R என்பது $1 < x < 7$ இல் கூடும், $0 < x < 1$ மற்றும் $x > 7$ இல் குறையும். MR என்பது $0 < x < 4$ மற்றும் $x > 4$ இல் குறையும்

6) (i) TC, $0 < x < 10$, $x > 20$ இல் கூடுகிறது. $10 < x < 20$.
MC $0 < x < 15$ இல் குறைகிறது $x > 15$ இல் கூடுகிறது.

(ii) TC, $0 < x < 40$ இல் கூடுகிறது, $x > 40$ இல் குறைகிறது
MC எப்பொழுதும் குறைகிறது.

7) (i) $x = 0$ இல் பெரும மதிப்பு = 7, $x = 4$ இல் சிறும மதிப்பு = -25.
(ii) $x = 1$ இல் பெரும மதிப்பு =-4, $x = 4$ இல் சிறும மதிப்பு = -31
(iii) $x = 2$ இல் சிறும மதிப்பு = 12
(iv) $x = 1$ இல் பெரும மதிப்பு = 19, $x = 3$ இல் சிறும மதிப்பு = 15

8) $x = 1$ இல் பெரும மதிப்பு = 53, $x = -1$ இல் சிறும மதிப்பு = -23.

9) (0, 3), (2, -9) 11) $\frac{1}{2} < x < 1$ மேல்நோக்கி குவிவாகவும்,
$-\infty < x < \frac{1}{2}$ மற்றும் $1 < x < \infty$ இல் கீழ்நோக்கி குவிவாகவும்
உள்ளது. 12) $q = 3$. 13) $x = 1$ இல் பெரும மதிப்பு = 0,
$x = 3$ இல் சிறும மதிப்பு = -28, $x = 0$ இல் வளைவு மாற்றப்புள்ளி

பயிற்சி 4.2

1) $x = 15$ 2) 15, 225 4) $x = 5$ 5) 1, $\frac{3}{2}$ 6) $x = 8$
7) (i) 10.5, ரூ.110.25 (ii) 3, 0 (iii) $x = 6$ 8) $x = 60$ 9) Rs.1600
10) $x = 70$ 11) $x = 13$ 12) A : 1000, B : 1800, C : 1633
13) A : 214.476, ரூ.21.44 B : 67.51 ரூ.58.06 C : 2000, ரூ.4,
D : 537.08, ரூ.27.93 14) (i) 400 (ii) ரூ.240
(iii) $\frac{3}{2}$ கோருதல் / ஆண்டு (iv) ஓர் ஆண்டின் $\frac{2}{3}$ பாகம் 15) (i) 800
(ii) ஓர் ஆண்டின் $\frac{1}{4}$ பாகம் (iii) 4 (iv) ரூ.1200.

பயிற்சி 4.3

1) $8x + 6y$; $6x - 6y$
3) (i) $24x^5 + 3x^2y^5 - 24x^2 + 6y - 7$ (ii) $5x^3y^4 + 6x + 8$
(iii) $120x^4 - 48x + 6xy^5$ (iv) $20x^3y^3$ (v) $15x^2y^4 + 6$
(vi) $15x^2y^4 + 6$ 4) (i) $30x^4y^2 + 8x + 4$ (ii) 500
(iii) $12x^5y - 24y^2 + 6$ (iv) -90 (v) $120x^3y^2 + 8$ (vi) 968

(vii) $12x^5 - 48y$ (viii) 12 (ix) $60x^4y$ (x) 2880 (xi) 2880

14) (i) 940 (ii) 700 15) நோட்டுப் புத்தகம்

16) (i) ரூ.18,002 (ii) ரூ.8005

பயிற்சி 4.4

1) (i) 10 − 2L + 3K, (ii) 5 − 4K + 3L (iii) 14, 0

3) 1, 4 4) 3.95, 120 5) 2.438, 3.481

7) (i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{1}{2}$ 8) $\frac{3}{5}, \frac{2}{5}$ 9) 6, 1 10) $-\frac{10}{3}, \frac{5}{6}$

பயிற்சி 4.5

1) b	2) d	3) a	4) b	5) c	6) c	7) a
8) c	9) b	10) d	11) a	12) a	13) d	14) a
15) c	16) a	17) c	18) d	19) a	20) a	

தொகையீட்டின் பயன்பாடுகள்

பயிற்சி 5.1

1) 0 2) 80 3) $\frac{\pi}{2}$ 4) 2 5) $\sqrt{2}$ 6) $\frac{1}{20}$ 7) $\frac{\pi}{12}$

8) 1 9) 10) $(a + b)\frac{\pi}{4}$ [illegible]

பயிற்சி 5.2

விடைகள் சதுர அலகுகளில் உள்ளன

1) 9 2) 6 3) 4) 2 5) 6) log3 7) $\frac{8a^2}{3}$ 8) 8

9) 4 log4 10) πa^2 11) πab

பயிற்சி 5.3

1) $C = 10x + 12x^2 - x^3 + 4$, $AC = 10 + 12x - x^2 + \frac{4}{x}$

2) $C = 100\left(\log\frac{x}{16} + 1\right)$, $AC = \frac{100}{x}\left(\log\frac{x}{16} + 1\right)$

3) $C = x^3 - 5x^2 + 3x + 8$, $AC = x^2 - 5x + 3 + \frac{8}{x}$

4) $C = 5x - 3x^2 + x^3 + 100$, $AC = 5 - 3x + x^2 + \frac{100}{x}$

5) $C = 20x - 0.02x^2 + 0.001x^3 + 7000$

$AC = 20 - 0.02x + 0.001x^2 + \frac{7000}{x}$

6) $R = 15x - \frac{9x^2}{2} - x^3$, $AR = 15 - \frac{9x}{2} - x^2$

7) $R = 9x - x^2 + \frac{4x^3}{3}$, $p = 9 - x + \frac{4x^2}{3}$

8) $R = 100x - 3x^3$, $p = 100 - 3x^2$

9) $R = 2x + 2x^2 - \frac{x^3}{3}$, $p = 2 + 2x - \frac{x^2}{3}$

10) $R = 4x - \frac{3x^2}{2}$, $p = 4 - \frac{3x}{2}$

11) $p = 3 - x$, $R = 3x - x^2$

12) $p = 5 - \frac{x^2}{2}$, $R = 5x - \frac{x^3}{2}$ 13) $p = \frac{k}{x}$, k ஒரு மாறிலி.

14) $C = 2x + e^{3x} + 500$, $AC = 2 + \frac{e^{3x}}{x} + \frac{500}{x}$

15) $R = - \quad - \log x^2 + 9$, $p = -\frac{3}{x^2} - \frac{\log x^2}{x} + \frac{9}{x}$

16) $R = 16x - \frac{x^3}{3}$, $p = 16 - \frac{x^2}{3}$ 17) $13x - 0.065x^2 - 120$

18) R = ரூ. 4,31,667 $\frac{10}{3}$

பயிற்சி 5.4

விடைகள் அலகுகளில் உள்ளன.

1) 27 2) $\frac{250}{3}$ 3) (i) 16 (ii) 4 4) 216 5) 128 6)

7) (i) $\frac{9}{2}$ (ii) 18 8) $\frac{8}{3}$ 9) 9 ; 18 10) 18 ; 36 11) 144 ; 48

12) $\frac{63}{2}$; $\frac{9}{2}$ 13) $\frac{16}{3}$; 32 14) 50 ; 15 15) 16 log2 -8 ; 4

பயிற்சி 5.5

1) (c)	2) (a)	3) (a)	4) (b)	5) (a)
6) (a)	7) (a)	8) (b)	9) (a)	10) (b)
11) (c)	12) (a)	13) (b)	14) (a)	15) (a)
16) (a)	17) (a)	18) (b)		